

DOI: 10.48303/bese.2024.2023815.1151

نوع مقاله: یادداشت پژوهشی

چکیده

در این مقاله، ابتدا تعدادی شتاب‌نگاشت مصنوعی که از مجموع امواج سینوسی با فرکانس‌های مختلف و با درصد نوفه‌های مختلف تشکیل شده بودند، در نظر گرفته شدند. با انتگرال‌گیری متوالی از آنها رکوردهای سرعت و تغییر مکان به دست آمد. با حذف یک‌درمیان نقاط این رکوردها، تعداد نقاط آنها کاسته گردید. سپس، نقاط حذف شده با استفاده از درون‌یابی خطی و درون‌یابی اسپلاین محاسبه شدند و با داشتن مقادیر واقعی نقاط حذف شده، جذر میانگین مربعات خطای این دو روش درون‌یابی محاسبه شدند و با یکدیگر مقایسه گردیدند. در گام بعدی، ۲۱ رکورد شتاب، سرعت و تغییر مکان زلزله‌های مختلف از سایت PEER دانلود گردید. جذر میانگین مربعات خطا به ازای نرخ کاهش داده‌های برابر با ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ با استفاده از درون‌یابی خطی و درون‌یابی اسپلاین برای این رکوردهای واقعی محاسبه شد. مقایسه این خطاها نشان داد که خطای درون‌یابی خطی برای رکوردهای تغییر مکان بیشتر از خطای درون‌یابی اسپلاین برای رکوردهای متناظر سرعت می‌باشد. همچنین، مشاهده شد که خطای درون‌یابی خطی برای رکوردهای سرعت بیشتر از خطای درون‌یابی اسپلاین برای رکوردهای متناظر شتاب می‌باشد. همچنین، با افزایش نرخ کاهش داده‌ها، نسبت خطای درون‌یابی خطی به خطای متناظر درون‌یابی اسپلاین روندی کاهشی داشت.

واژگان کلیدی: درون‌یابی اسپلاین مکعبی، درون‌یابی خطی، جذر میانگین مربعات خطا، رکوردهای شتاب، سرعت و تغییر مکان زلزله، نوفه، گام زمانی، برازش منحنی.

بررسی کمی میزان دقت درون‌یابی اسپلاین مکعبی نسبت به درون‌یابی خطی؛ مطالعه موردی: رکوردهای زلزله

مسعود محمودآبادی (نویسنده مسئول)

استادیار، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران،
m.mahmoudabadi@qom.ac.ir

محمدعلی امامی بفرولی

دانشجوی کارشناسی، دانشکده فنی و مهندسی، گروه عمران،
دانشگاه قم، قم، ایران

۱- مقدمه

نمی‌توان گفت که برای تمام موارد استفاده، درون‌یابی اسپلاین دقیق‌تر از روش درون‌یابی خطی باشد.

هدف این مقاله بررسی میزان دقت درون‌یابی اسپلاین نسبت به درون‌یابی خطی برای رکوردهای شتاب، سرعت و تغییر مکان زلزله‌های مختلف است. در واقع هدف این است که با استفاده از رکوردهای مصنوعی و واقعی شتاب، سرعت و تغییر مکان و با حذف یک‌درمیان، دو در میان ... پنج در میان نقاط این رکوردها و محاسبه تقریبی نقاط حذف شده با استفاده از درون‌یابی خطی (که ساده‌ترین روش درون‌یابی است) و نیز درون‌یابی اسپلاین مکعبی (که درون‌یابی دقیق‌تری است که در

درون‌یابی خطی ساده‌ترین روش درون‌یابی است که با داشتن مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه (گام زمانی)، می‌توان مقادیر تابع را در بین بازه برآورد نمود. از طرفی دیگر، درون‌یابی اسپلاین مکعبی، به تعداد بازه‌های زمانی، منحنی‌های درجه سه در نظر می‌گیرد که این منحنی‌ها در نقاط اتصالشان، علاوه بر مقدارشان، باید مقادیر مشتق اول و دومشان نیز با یکدیگر برابر باشد (Chapra & Canale, 2006; Burden & Faires, 2011). این روش درون‌یابی خیلی پیچیده‌تر از روش درون‌یابی خطی است و از تمام داده‌ها برای محاسبه ضرایب ثابت منحنی درجه سه یک بازه خاص استفاده می‌کند، ولی با این وجود با اطمینان

در گام بعدی، ۲۱ رکورد شتاب، سرعت و تغییر مکان زلزله‌های مختلف واقعی در نظر گرفته شد. جذر میانگین مربعات خطا به ازای نرخ کاهش داده‌های برابر با ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ با استفاده از درون‌یابی خطی و درون‌یابی اسپلاین برای این رکوردهای واقعی محاسبه گردید و با مقایسه این خطاها نتایج جالبی به دست آمد.

۲- درون‌یابی به روش اسپلاین مکعبی

در این بخش از مطالب موجود در مراجع برداشت شده است (Chapra & Canale, 2006; Burden & Faires, 2011). فرض کنید که $n+1$ نقطه از داده‌ها و در نتیجه n بازه وجود داشته باشد. منظور از درون‌یابی به روش اسپلاین مکعبی این است که برای هر بازه، یک چندجمله‌ای درجه ۳ به شکل $f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ به دست آورده شود. در نتیجه، در مجموع به $4n$ معادله احتیاج است که با حل آنها ضرایب مجهول a_i ، b_i ، c_i و d_i به دست آید. این $4n$ معادله به صورت زیر به دست می‌آیند:

الف) مقادیر توابع f_i ها باید در نقاط داخلی با مقادیر داده‌ها برابر باشند که اعمال این شرایط، معادل با به دست آمدن $2n - 2$ معادله است.

ب) اولین و آخرین از توابع f_i ها (f_1 و f_n) باید از نقطه ابتدا و انتهای داده‌ها عبور کنند که اعمال این دو شرط، معادل با به دست آمدن دو معادله است.

پ) مشتق اول f_i ها باید در نقاط داخلی با یکدیگر برابر باشند که اعمال این شرایط، معادل با به دست آمدن $n-1$ معادله است.

ت) مشتق دوم f_i ها باید در نقاط داخلی با یکدیگر برابر باشند که اعمال این شرایط، معادل با به دست آمدن $n-1$ معادله است.

ث) مشتق دوم اولین و آخرین از f_i ها (f_1 و f_n) باید در نقطه ابتدا و انتهای داده‌ها برابر صفر باشد که اعمال این دو شرط، معادل با به دست آمدن دو معادله است.

نرم‌افزارهایی مانند اتوکد و فتوشاپ و Abaqus و غیره وجود دارد) میزان خطای این دو روش درون‌یابی محاسبه شود و با یکدیگر مقایسه گردد. تلاش نویسندگان این مقاله برای پیدا کردن کاری مشابه به نتیجه نرسید و به نظر می‌آید این کار برای اولین بار است که حداقل در ایران انجام شده باشد.

در کتب مربوط به روش‌های عددی، می‌توان جزئیات مربوط به درون‌یابی به روش اسپلاین مکعبی را مشاهده نمود (Chapra & Canale, 2006; Burden & Faires, 2011). همچنین، در کارهای تحقیقاتی چندی از تابع اسپلاین استفاده شده است که در ادامه به چندین کار اشاره می‌شود. نعیم (Naeim, 1996) شتاب‌نگاشت‌های ۲۰ ساختمان که شتاب آنها در هنگام زلزله نورث‌ریج ثبت شده بود را مورد بررسی و مطالعه قرار داد. با توجه به اینکه در تمام طبقات این ساختمان‌ها دستگاه شتاب‌نگار نصب نشده بود، او با استفاده از درون‌یابی با تابع اسپلاین، شتاب سایر طبقات را برآورد نمود و سپس مقادیر برش و لنگر واژگونی پایه ساختمان‌ها را محاسبه کرد. وامواتسیکوس و کرنل (Vamvatsikos & Cornell, 2004) نقاط گسسته به دست آمده از تحلیل دینامیکی افزایشی را هم با استفاده از درون‌یابی خطی و هم با استفاده از درون‌یابی اسپلاین به یکدیگر متصل نمودند و سپس نمودارهای به دست آمده را مورد استفاده قرار دادند.

در بخش‌های بعدی مقاله، ابتدا روش درون‌یابی اسپلاین مکعبی به‌طور مفصل توضیح داده شده است. سپس، ابتدا تعدادی شتاب‌نگاشت مصنوعی که از مجموع امواج سینوسی با فرکانس‌های مختلف و با درصد نوفه‌های مختلف تشکیل شده بودند، با گام زمانی $0/004$ و $0/02$ ثانیه در نظر گرفته شدند. با انتگرال‌گیری متوالی از آنها رکوردهای سرعت و تغییر مکان به دست آمد. با حذف یک درمیان نقاط این رکوردها، تعداد نقاط آنها کاسته گردید. سپس، نقاط حذف شده با استفاده از درون‌یابی خطی و درون‌یابی اسپلاین محاسبه شدند و با داشتن مقادیر واقعی نقاط حذف شده، جذر میانگین مربعات خطای این دو روش درون‌یابی محاسبه شدند و با یکدیگر مقایسه گردیدند.

که تفاوت آن با موج سینوسی واقعی به مراتب کمتر است. لازم به ذکر است که منحنی‌های اسپلاین رسم شده در شکل (۱) با شرایط مرزی آزاد رسم گردیده‌اند.

۳- بررسی کمی میزان دقت درون‌یابی اسپلاین مکعبی نسبت به درون‌یابی خطی

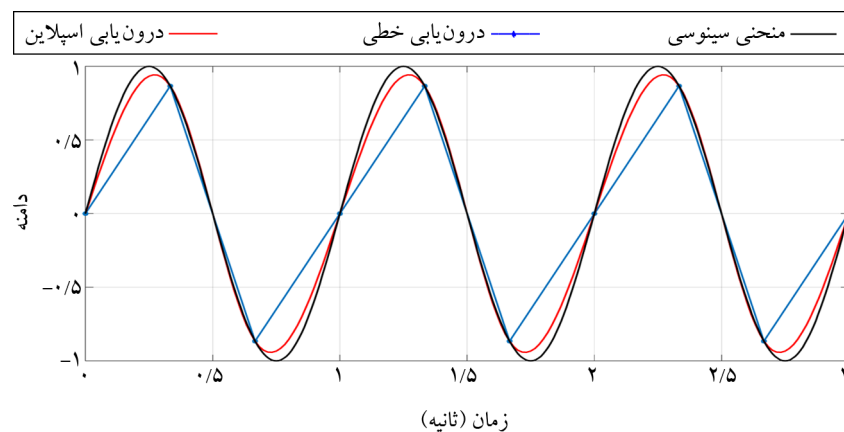
۳-۱- نتایج بررسی رکوردهای شتاب، سرعت و تغییر مکان مصنوعی

در این بخش از مقاله، به عنوان یک کار مقدماتی، تعداد ۲۱ شتاب‌نگاشت مصنوعی که مجموع ۱۱ موج سینوسی با فرکانس‌های ۰/۰۲، ۰/۰۵، ۰/۱، ۰/۲، ۰/۵، ۱، ۲، ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ هرتز بودند در محیط MATLAB تولید گردیدند. این یازده فرکانس از طیف‌های طراحی مرجع (Chopra, 2012) اخذ گردیده‌اند. در حقیقت این فرکانس‌ها، فرکانس‌های شاخص این طیف‌ها می‌باشند. دامنه‌های این یازده فرکانس در حالت الف برای تمام فرکانس‌ها برابر واحد در نظر گرفته شد. در حالت ب، دامنه‌های فرکانس‌های فوق‌الذکر برابر با فرکانس امواج سینوسی و در حالت ج، دامنه‌های امواج برابر با عکس فرکانس امواج در نظر گرفته شد. تعداد نقاط هر کدام از این شتاب‌نگاشت‌ها برابر با ۱۰۰۰۱ نقطه بود و فاصله زمانی بین نقاط این شتاب‌نگاشت‌ها برابر با ۰/۰۰۴ ثانیه ملحوظ گردید. عدد ۰/۰۰۴ ثانیه کوچک‌ترین گام زمانی رکوردهایی هستند که در بخش ۳-۲ مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرند.

تعبیر هندسی بند ث این است که توابع اسپلاین در نقاط ابتدا و انتهای داده‌ها تبدیل به خط مستقیم می‌شوند. به عبارت دیگر، انحنای توابع اسپلاین در نقاط ابتدا و انتهای داده‌ها برابر صفر است. به این نوع اسپلاین‌ها، اسپلاین‌های طبیعی نیز گفته می‌شود. لازم به ذکر است که در مرجع (Chapra & Canale 2006) از اعمال بند ث، به عنوان شرایط مرزی آزاد یاد شده است. اگر در این بند، به جای مساوی قرار دادن مشتق دوم، مشتق اول برابر صفر قرار داده شود، شرایط مرزی مقید به دست می‌آید. معمولاً از شرایط مرزی آزاد استفاده می‌شود. در این تحقیق نیز از شرایط مرزی آزاد استفاده شده است. در ادامه، یک مثال از درون‌یابی به روش اسپلاین مکعبی آورده شده است.

موجی سینوسی با دوره تناوب یک ثانیه و دامنه واحد را در نظر بگیرید. سه سیکل از این موج با رنگ مشکی در شکل (۱) رسم شده است.

هر سیکل از این موج سینوسی به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. در نتیجه، این منحنی که برابر با ۳ سیکل از موجی سینوسی با دوره تناوب یک ثانیه است با ۱۰ نقطه نشان داده شده است. این ۱۰ نقطه با دایر توپر بنفش مشخص گردیده‌اند. با وصل کردن این ۱۰ نقطه به یکدیگر با خطوطی مستقیم، نمودار دندانه‌داری به دست می‌آید که با موج سینوسی واقعی تفاوت خیلی زیادی دارد؛ اما وقتی با منحنی‌های اسپلاین مکعبی این ۱۰ نقطه به یکدیگر متصل شوند، با دقت در شکل (۱) مشاهده می‌شود که نمودار همواری (نمودار قرمز رنگ) حاصل می‌گردد



شکل (۱): نمودار منحنی سینوسی به همراه تقریب خطی آن و نیز تقریب با تابع اسپلاین مکعبی.

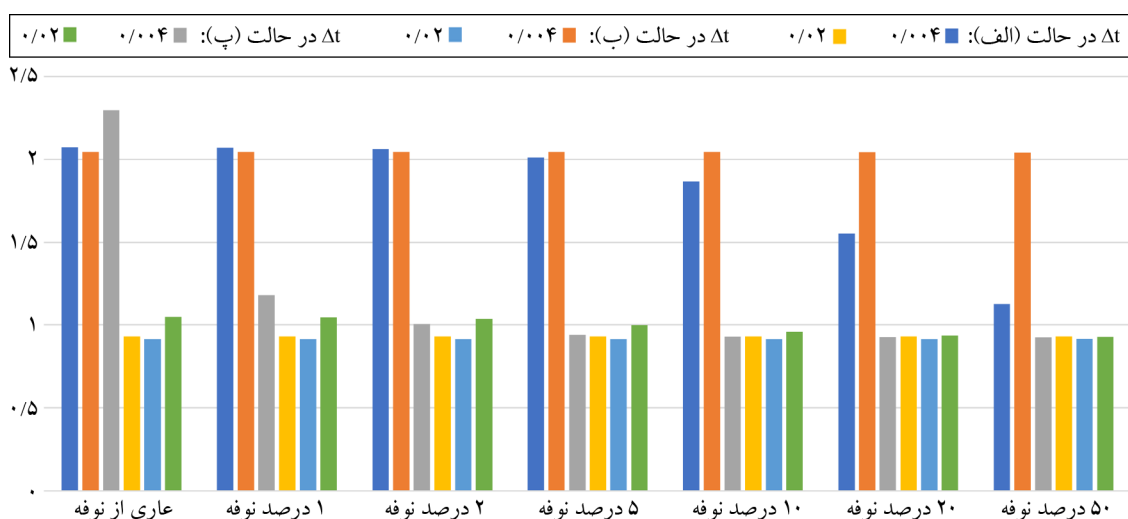
۱- از ۲۱ شتاب‌نگاشت با گام زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه، تنها نسبت خطای ۴ شتاب‌نگاشت کمتر از یک است و ۱۷ شتاب‌نگاشت دیگر نسبت خطای بالاتر از یک را دارند. این موضوع بیانگر برتری زیاد درون‌یابی اسپلاین نسبت به درون‌یابی خطی برای گام زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه است. بیشترین نسبت خطا برای این نوع از شتاب‌نگاشت‌ها برابر با ۲/۲۹۵ است که مربوط به حالت ج بدون نوفه می‌باشد. در حالت ج دامنه‌های امواج عکس فرکانس آنها می‌باشد. به عبارت دیگر، بیشترین دامنه برابر با ۵۰ متر بر مجذور ثانیه است که مربوط به فرکانس ۰/۰۲ هرتز (پریود ۵۰ ثانیه) است و کمترین دامنه برابر با ۰/۰۲ متر بر مجذور ثانیه است که مربوط به فرکانس ۵۰ هرتز (پریود ۰/۰۲ ثانیه) است. این شتاب‌نگاشت در شکل (۳) به همراه درون‌یابی خطی و اسپلاین آن نشان داده شده است. کاملاً مشخص است امواج با پریودهای بلند حاکم بر این شتاب‌نگاشت است. در این شکل یک قسمت بزرگ شده از نمودار شکل (۳) نیز نشان داده شده است.

۲- از ۲۱ شتاب‌نگاشت با گام زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه، کمترین نسبت خطا برابر با ۰/۹۲۳۳ است که باز مربوط به حالت ج می‌باشد که دامنه‌های امواج عکس فرکانس آنها است و مقدار نوفه آن برابر با ۵۰ درصد است. این شتاب‌نگاشت در شکل (۴) به همراه درون‌یابی خطی و اسپلاین آن نشان داده شده است.

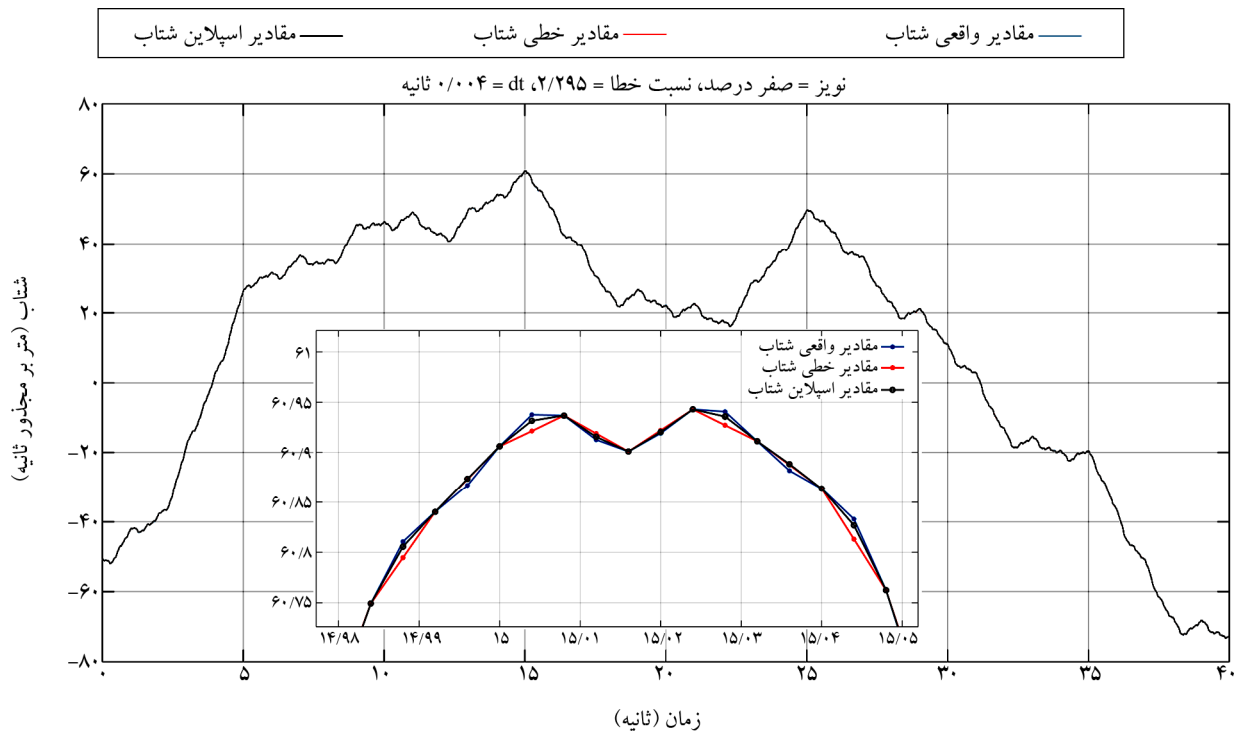
به این سه نوع شتاب‌نگاشت ایجاد شده مقادیر صفر، ۱، ۲، ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ درصد نوفه (نویز) اضافه شد و بدین ترتیب ۲۱ شتاب‌نگاشت مصنوعی ایجاد گردید. نوفه ایجاد شده برابر با ۱۰۰۰۱ نقطه تصادفی با میانگین صفر و انحراف معیار واحد بودند که با استفاده از دستور randn در محیط MATLAB تولید گردیدند. مشابه این ۲۱ شتاب‌نگاشت مصنوعی تولید شده، ۲۱ شتاب‌نگاشت دیگر نیز تولید گردید که تنها تفاوت آنها در گام زمانی‌شان بود. گام زمانی ۲۱ شتاب‌نگاشت اخیر برابر با ۰/۰۲ ثانیه در نظر گرفته شد که بزرگ‌ترین گام زمانی رکوردهایی است که در بخش ۳-۲ بررسی خواهند شد.

با حذف یک‌درمیان نقاط این ۴۲ شتاب‌نگاشت، ۵۰۰۱ نقطه باقی ماند که ۵۰۰۰ نقطه حذف شده یک‌بار با درون‌یابی خطی و بار دیگر با درون‌یابی اسپلاین به‌طور تقریبی محاسبه شدند و با داشتن ۵۰۰۰ نقطه واقعی، جذر میانگین مربعات خطای نقاطی که با درون‌یابی خطی و نیز درون‌یابی اسپلاین به دست آمده بودند، محاسبه شدند. سپس، نسبت جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی به جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی اسپلاین این ۴۲ شتاب‌نگاشت مصنوعی محاسبه شد که حاصل کار به شکل نمودار میله‌ای در شکل (۲) آورده شده است.

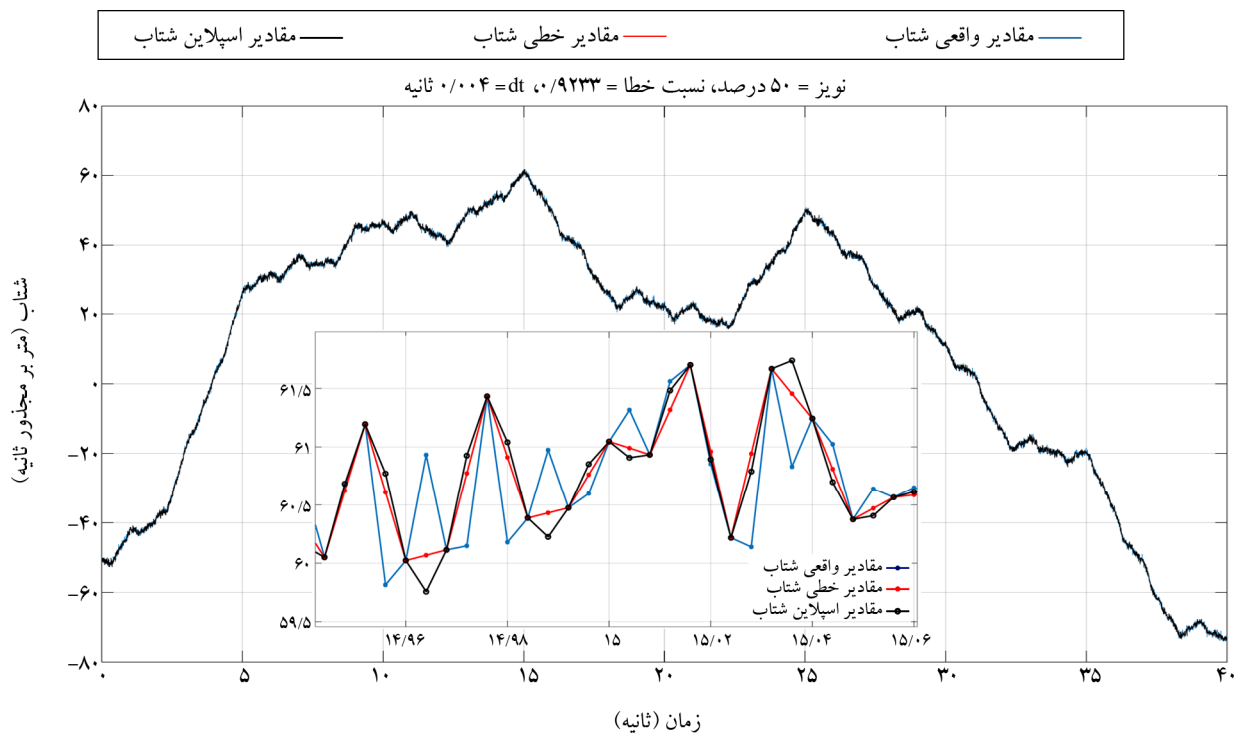
با بررسی دقیق نمودار میله‌ای نشان داده شده در شکل (۲) نتایج زیر قابل حصول است:



شکل (۲): نمودار میله‌ای نسبت جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی به جذر میانگین مربعات خطای متناظر درون‌یابی اسپلاین مکعبی برای ۴۲ شتاب‌نگاشت مصنوعی تولید شده در این مقاله.



شکل (۳): نمودار تاریخچه زمانی شتاب‌نگاشت مصنوعی‌ای که مقدار نوفه آن صفر درصد و دامنه امواج آن برابر با عکس فرکانس‌شان است. یک قسمت بزرگ شده از این نمودار نیز در شکل آمده است.



شکل (۴): نمودار تاریخچه زمانی شتاب‌نگاشت مصنوعی‌ای که مقدار نوفه آن پنجاه درصد و دامنه امواج آن برابر با عکس فرکانس‌شان است. یک قسمت بزرگ شده از این نمودار نیز در شکل آمده است.

شتاب‌نگاشت شدیداً به مقدار نوفه حساس است به طوری که وقتی که شتاب‌نگاشت عاری از نوفه است نسبت خطا برابر با

همچنین، در این شکل یک قسمت بزرگ شده از این نمودار نیز نشان داده شده است. ملاحظه می‌گردد این

شتاب‌نگاشت مصنوعی برابر با فرکانس امواج در نظر گرفته شده است. علت آن می‌تواند ناشی از این موضوع باشد که شتاب‌نگاشت‌های این حالت دارای محتوای فرکانسی بالایی است و نوفه هم دارای فرکانس بالا می‌باشد، در نتیجه وجود یا عدم وجود آن نمی‌تواند تأثیری روی شتاب‌نگاشت اصلی بگذارد. توجه شود در این حالت دامنه موج سینوسی با فرکانس ۵۰ هرتز برابر با ۵۰ متر بر مجذور ثانیه و دامنه موج سینوسی با فرکانس ۲۰ هرتز برابر با ۲۰ متر بر مجذور ثانیه و الی آخر می‌باشد.

۵- از ۲۱ شتاب‌نگاشت با گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه، تنها نسبت خطای سه شتاب‌نگاشت بزرگ‌تر از یک است و ۱۸ شتاب‌نگاشت دیگر نسبت خطای کوچک‌تر از یک را دارند. این موضوع بیانگر برتری زیاد درون‌یابی خطی نسبت به درون‌یابی اسپلاین برای گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه است. بیشترین نسبت خطا برای این ۲۱ نوع شتاب‌نگاشت برابر با ۱/۰۴۶۴ است که مربوط به حالت ج بدون نوفه می‌باشد. با توجه به اینکه برای گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه، نرخ نمونه‌برداری برابر با ۵۰ نقطه در هر ثانیه است لذا به نظر می‌آید با این نرخ نمونه‌برداری امکان برداشت مؤثر فرکانس‌های بالا که شامل نوفه نیز می‌باشد، وجود ندارد. دلیلی که بر این ادعا می‌توان ارائه نمود این است که در حالت الف و ب پارامتر نسبت خطا به ازای تمام مقادیر نوفه ثابت مانده است. در حالت ج که دامنه امواج برابر با عکس مقدار فرکانس امواج است و امواج با پریود بلند دارای دامنه زیادی هستند، نوفه روی پارامتر نسبت خطا تأثیر اندکی داشته است به طوری که در حالت بدون نوفه مقدار آن ۱/۰۴۶۴ است و در حالت نوفه ۵۰ درصد مقدارش به ۰/۹۲۵۳ تنزل یافته است که کاهش ۱۱/۵۷ درصدی را نشان می‌دهد.

با انتگرال‌گیری از رکوردهای شتاب که جمع جبری امواج سینوسی‌ای بودند که جزئیات آن در ابتدای بخش شرح داده شد، رکوردهای سرعت به دست می‌آیند. انتگرال یک تابع سینوسی، یک تابع کسینوسی خواهد بود که صرف‌نظر از

بزرگ‌ترین مقدار آن و برابر با ۲/۲۹۵ است. با افزایش مقدار نوفه به ۵۰ درصد نسبت خطا به ۰/۹۲۳۳ می‌رسد که ۵۹/۷۷ درصد کاهش را نشان می‌دهد. روند کاهش نسبت خطا به مقدار نوفه به نحوی است که برای نوفه ۵ درصد تقریباً ۹۸ درصد کاهش اتفاق افتاده است. به عبارت دیگر، برای این شتاب‌نگاشت مصنوعی که دامنه آن برابر با معکوس مقدار فرکانس امواج آن است، مقدار نوفه ۵ درصد عملاً باعث اشباع شدن آن می‌شود و افزایش نوفه تا سطح ۵۰ درصد، تنها باعث کاهش بسیار ناچیزی در نسبت خطا می‌گردد. نسبت خطای بالاتر از یک بیانگر برتری درون‌یابی اسپلاین است و نسبت خطای کوچک‌تر از یک بیانگر برتری درون‌یابی خطی است.

۳- برای هفت شتاب‌نگاشت حالت الف که فاصله زمانی بین نقاط آن ۰/۰۰۴ ثانیه است، مقدار حداکثر نسبت خطا برابر با ۲/۰۷۳۵ است که مربوط به شتاب‌نگاشت بدون نوفه است و حداقل نسبت خطا مساوی با ۱/۱۲۴۶ است که مربوط به شتاب‌نگاشت با نوفه ۵۰ درصد است. بدین ترتیب مشاهده می‌شود با افزایش نوفه از صفر به ۵۰ درصد، ۴۵/۷۶ درصد کاهش در نسبت خطا رخ داده است. همچنین، برای حالت الف، اشباع شدن از نوفه حتی تا مقدار ۵۰ درصد نوفه مشاهده نگردید. در حالت الف، مقادیر دامنه‌های فرکانس‌های مولد شتاب‌نگاشت مصنوعی برای هر ۱۱ فرکانس آن برابر واحد (یک متر بر مجذور ثانیه) در نظر گرفته شده است.

۴- برای هفت شتاب‌نگاشت حالت ب که فاصله زمانی بین نقاط آن ۰/۰۰۴ ثانیه است، مقدار حداکثر نسبت خطا برابر با ۲/۰۴۴۲ است که مربوط به شتاب‌نگاشت بدون نوفه است و حداقل نسبت خطا مساوی با ۲/۰۴۱۲ است که مربوط به شتاب‌نگاشت با نوفه ۵۰ درصد است. بدین ترتیب مشاهده می‌شود با افزایش نوفه از صفر به ۵۰ درصد، ۰/۱۴۷ درصد کاهش در نسبت خطا رخ داده است که بسیار اندک است. مشاهده می‌شود برای این حالت، شتاب‌نگاشت اصلاً به مقدار نوفه حساس نیست. در حالت ب، دامنه‌های فرکانس‌های مولد

خطا برای حالت ج نیز برابر با $1/111$ است که مربوط به نوبه 50 درصد می‌باشد. در حالت ج دامنه‌های امواج عکس فرکانس آنها می‌باشند. مشاهده می‌شود در حالت ج نسبت خطا به مقدار نوبه حساسیت زیادی دارد به طوری که این نسبت در حالتی که رکورد سرعت بدون نوبه است به حدود یک‌هفتم آن ($0/142$) آن برای نوبه 50 درصد می‌رسد.

۲- برعکس رکوردهای حالت ج، رکوردهای سرعت حالت ب به مقدار نوبه هیچ حساسیتی نشان نمی‌دهند. به طوری که نسبت خطا به ازای تمام مقادیر نوبه ثابت و برابر با $2/0665$ است. علت این موضوع بالا بودن محتوای فرکانسی این دسته از رکوردها می‌باشد. در حالت ب، دامنه امواج شتاب‌نگاشت متناسب با فرکانس امواج است و هرچند با فرآیند انتگرال‌گیری امواج فرکانس بالا مقداری تضعیف شده‌اند، اما میزان این تضعیف آنقدر نبوده است که بتواند اثر امواج فرکانس بالا را خنثی کند.

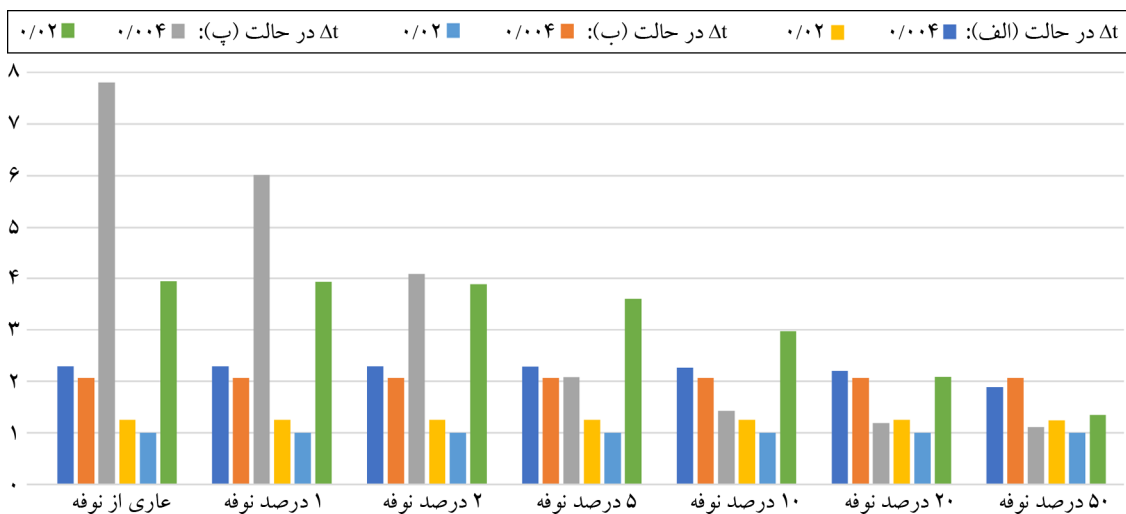
رکوردهای سرعت حالت الف با گام زمانی $0/004$ ثانیه حساسیت کمی به نوبه از خود نشان دادند. به طوری که نسبت خطا به ازای نوبه صفر برابر با $2/287$ و به ازای نوبه 50 درصد $1/887$ بود که کاهش $17/5$ درصدی را نشان می‌دهد. در حالت الف، دامنه امواج شتاب‌نگاشت برابر با مقدار یک متر بر مجذور ثانیه برای 11 فرکانس مذکور در ابتدای بخش در نظر گرفته شد.

علامت آن که علامت منفی است باید بر فرکانس زاویه‌ای آن موج (امگا آن موج) نیز تقسیم گردد. بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که با این کار مؤلفه‌های فرکانسی بالای موج (مخصوصاً فرکانس‌های 10 ، 20 و 50 هرتز) تضعیف و مؤلفه‌های با فرکانس پایین (مخصوصاً فرکانس‌های $0/02$ ، $0/05$ و $0/1$) تقویت می‌گردند. این کار انجام شد، بدین صورت که از شتاب‌نگاشت مذکور انتگرال گرفته شد و 42 رکورد سرعت به دست آمد. لازم به ذکر است، با استفاده از دستور `cumtrapz` در محیط MATLAB از نوبه نیز به روش عددی (دوزنقه‌ای) انتگرال گرفته شد و به رکوردهای سرعت اضافه شد.

کاملاً مشابه با رکوردهای شتاب، با رکوردهای سرعت نیز همان کار انجام شد و نسبت خطاها محاسبه گردید که نتیجه کار در نمودار میله‌ای شکل (۵) نشان داده شده است.

با بررسی دقیق نمودارهای میله‌ای نسبت خطاهای نشان داده شده در شکل (۵) نتایج زیر به دست می‌آید:

۱- تمامی نسبت خطاهای 21 رکورد سرعت با گام زمانی $0/004$ ثانیه بزرگ‌تر از یک است. این موضوع بیانگر برتری کامل درون‌یابی اسپلاین نسبت به درون‌یابی خطی برای رکوردهای سرعت با گام زمانی $0/004$ ثانیه است. بیشترین نسبت خطا برای این دسته از رکوردها برابر با $7/806$ است که مربوط به حالت ج بدون نوبه می‌باشد. کمترین نسبت



شکل (۵): نمودار میله‌ای نسبت جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی به جذر میانگین مربعات خطای متناظر درون‌یابی اسپلاین مکعبی برای 42 رکورد سرعت مصنوعی تولید شده در این مقاله.

مشاهده می شود فرآیند انتگرال گیری باعث شده است که امواج فرکانس بالا تضعیف و امواج فرکانس پایین تقویت گردد، در نتیجه، نسبت به رکوردهای شتاب متناظرشان، این رکوردها حساسیت کمتری به نوفه از خود نشان دادند.

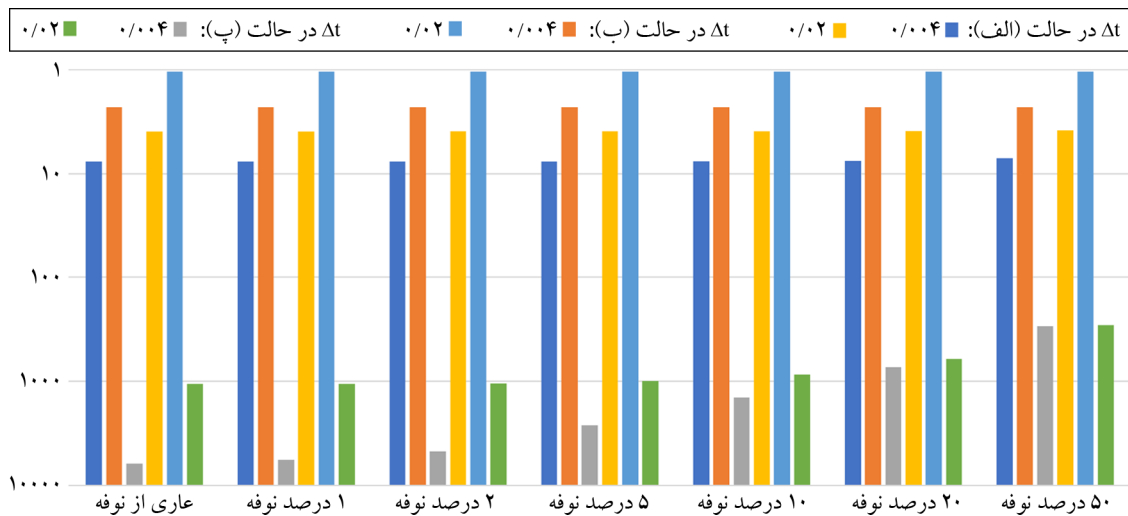
۳- ۱۴ نسبت خطا از ۲۱ نسبت خطای رکوردهای سرعت با گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه بزرگ تر از یک است. این موضوع بیانگر برتری ۶۷ درصدی درون یابی اسپلاین نسبت به درون یابی خطی برای رکوردهای سرعت با گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه است. بیشترین نسبت خطا برای این دسته از رکوردها برابر با ۳/۹۳۹ است که مربوط به حالت ج بدون نوفه است. کمترین نسبت خطا برای حالت ج نیز برابر با ۱/۳۴۶ است که مربوط به نوفه ۵۰ درصد می باشد. در حالت ج دامنه های امواج عکس فرکانس آنها می باشند. مشاهده می شود که در حالت ج نسبت خطا به مقدار نوفه حساسیت نسبتاً زیادی دارد به طوری که این نسبت در حالتی که رکورد سرعت بدون نوفه است به حدود یک سوم آن (۰/۳۴۲) برای نوفه ۵۰ درصد می رسد.

۴- برای حالت ب گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه، مانند حالت ب گام زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه، رکوردهای سرعت هیچ گونه حساسیتی به مقدار نوفه نشان ندادند و عدد نسبت خطا ثابت و برابر با ۰/۹۹۶۶ بود. نسبت خطای متناظر برای گام زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه برابر با ۲/۰۶۶۵ بود. این موضوع نشان می دهد که با افزایش گام زمانی، درون یابی خطی نسبت به درون یابی اسپلاین برتری پیدا می کند؛ زیرا نوفه دارای محتوای فرکانسی بالایی است و برای این مثال خاص با گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه قابل آشکار شدن و برداشت نیست.

۵- رکوردهای سرعت حالت الف با گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه حساسیت بسیار کمی به نوفه از خود نشان دادند، به طوری که نسبت خطا به ازای نوفه صفر برابر با ۱/۲۵۰ و به ازای نوفه ۵۰ درصد ۱/۲۴۰ بود که کاهش ۰/۸ درصدی را نشان داد.

با انتگرال گیری از رکوردهای سرعت که جمع جبری از امواج کسینوسی ای بودند که جزئیات آن قبلاً شرح داده شد، کاملاً مشابه با رکوردهای سرعت و شتاب، همان فرآیند با رکوردهای تغییر مکان نیز انجام شد و نسبت خطاها محاسبه گردید که حاصل کار در نمودار میله ای شکل (۶) نشان داده شده است. با توجه به تفاوت خیلی زیاد اعداد مربوط به نسبت خطاها، محور قائم به صورت لگاریتمی معکوس مدرج شده است. با بررسی دقیق نمودارهای میله ای نسبت خطاهای نشان داده شده در شکل (۶) نتایج زیر به دست می آید:

۱- تمامی نسبت خطاهای ۲۱ رکورد تغییر مکان با گام زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه بزرگ تر از یک است. این موضوع بیانگر برتری کامل درون یابی اسپلاین نسبت به درون یابی خطی برای رکوردهای تغییر مکان با گام زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه است. بیشترین نسبت خطا برای این دسته از رکوردها برابر با ۶۱۷۳ است که مربوط به حالت ج بدون نوفه است. این عدد فوق العاده بزرگ است و نشانگر برتری بسیار بالای درون یابی اسپلاین به درون یابی خطی است. در حالت ج دامنه های امواج عکس فرکانس آنها می باشند. در نتیجه، با دوبار انتگرال گیری از رکوردهای شتاب به رکوردهایی با مؤلفه های فرکانسی بسیار پائین (با پیوندهای بسیار بلند) دست می یابیم. در غیاب نوفه، درون یابی اسپلاین برتری بسیار زیادی بر درون یابی خطی دارد.



شکل (۶): نمودار میله‌ای نسبت جذر میانگین مربعات خطای درونیابی خطی به جذر میانگین مربعات خطای متناظر درونیابی اسپلاین مکعبی برای ۴۲ رکورد تغییر مکان مصنوعی تولید شده در این مقاله.

۳- رکوردهای تغییر مکان حالت الف با گام زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه حساسیت اندکی به نوفه از خود نشان دادند، به طوری که نسبت خطا به ازای نوفه صفر برابر با ۷/۶۳۴ و به ازای نوفه ۵۰ درصد ۷/۰۵۷ بود که کاهش ۷/۶ درصدی را نشان می‌دهد. در حالت الف، دامنه امواج شتاب‌نگاشت برابر با مقدار یک متر بر مجذور ثانیه برای ۱۱ فرکانس مذکور در ابتدای بخش در نظر گرفته شد. مشاهده می‌شود فرآیند دو بار انتگرال‌گیری باعث شده است که امواج فرکانس بالا تضعیف و امواج فرکانس پایین تقویت گردند، در نتیجه، نسبت به رکوردهای سرعت متناظرشان، این رکوردها حساسیت کمتری به نوفه از خود نشان دادند.

۴- تمامی نسبت خطاهای رکوردهای تغییر مکان با گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه بزرگ‌تر از یک است. این موضوع بیانگر برتری کامل درونیابی اسپلاین نسبت به درونیابی خطی برای رکوردهای سرعت با گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه است. بیشترین نسبت خطا برای این دسته از رکوردها برابر با ۱۰۶۱ است که مربوط به حالت ج بدون نوفه است. کمترین نسبت خطا برای حالت ج نیز برابر با ۲۸۹/۸ است که مربوط به نوفه ۵۰ درصد می‌باشد. در حالت ج دامنه‌های امواج عکس فرکانس آنها می‌باشند. مشاهده می‌شود در حالت ج نسبت خطا به مقدار نوفه حساسیت نسبتاً زیادی دارد به طوری که این نسبت در

چون در درونیابی اسپلاین، برخلاف درونیابی خطی، پیوستگی شیب و مشتق دوم در نقاط اتصال میانی حفظ می‌گردد. در نتیجه، نباید تعجب کرد که به این عدد فوق‌العاده بزرگ (عدد ۶۱۷۳) برای نسبت خطا برای این شرایط برسیم. کمترین نسبت خطا برای حالت ج نیز برابر با ۲۹۵/۴ است که مربوط به نوفه ۵۰ درصد می‌باشد. مشاهده می‌شود در حالت ج نسبت خطا به مقدار نوفه حساسیت فوق‌العاده زیادی دارد به طوری که این نسبت در حالتی که رکورد تغییر مکان بدون نوفه است به حدود یک بیست و یکم آن (۰/۰۴۷۹) برای حالتی که با نوفه ۵۰ درصد مخدوش می‌گردد، می‌رسد.

۲- برعکس رکوردهای حالت ج با گام زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه، رکوردهای تغییر مکان حالت ب با این گام زمانی، به مقدار نوفه هیچ حساسیتی نشان ندادند. به طوری که نسبت خطا به ازای تمام مقادیر نوفه ثابت و برابر با ۲/۲۹۵۱ است. علت این موضوع بالا بودن محتوای فرکانسی این دسته از رکوردها می‌باشد. در حالت ب، دامنه امواج شتاب‌نگاشت متناسب با فرکانس امواج است و هرچند با دو بار انتگرال‌گیری از امواج شتاب، فرکانس‌های بالا به شدت تضعیف شده‌اند، اما میزان این تضعیف آن‌قدر نبوده است که بتواند نوفه روی این امواج فرکانس بالا اثر بگذارد.

- بیشترین نسبت خطای رکوردهای سرعت برابر با $7/806$ برای گام زمانی $0/004$ ثانیه و دامنه‌های برابر با معکوس فرکانس امواج (حالت ج) و مقدار نوفه صفر است. با افزایش نوفه از صفر تا 50 درصد برای این دسته از رکوردهای سرعت کاهش خیلی شدید نسبت خطا ($85/8$ درصد کاهش) را شاهد هستیم (از عدد $7/806$ به $1/1112$ می‌رسیم).

- کمترین نسبت خطای رکوردهای سرعت برابر با $0/9966$ برای گام زمانی $0/02$ ثانیه و دامنه‌های برابر با فرکانس امواج (حالت ب) است. مقدار نوفه صفر تا 50 درصد روی نسبت خطایی تأثیر است. این عدد حدود یک است و برابری تقریبی درونیابی خطی را نسبت به درونیابی اسپلاین نشان می‌دهد.

- بیشترین نسبت خطای رکوردهای تغییر مکان برابر با 6173 برای گام زمانی $0/004$ ثانیه و دامنه‌های برابر با معکوس فرکانس امواج (حالت ج) و مقدار نوفه صفر است. با افزایش نوفه از صفر تا 50 درصد برای این دسته از رکوردهای تغییر مکان کاهش فوق‌العاده شدید نسبت خطا ($95/2$ درصد کاهش) را شاهد هستیم (از عدد 6173 به $295/4$ می‌رسیم).

- کمترین نسبت خطای رکوردهای تغییر مکان برابر با $1/0464$ برای گام زمانی $0/02$ ثانیه و دامنه‌های برابر با فرکانس امواج (حالت ب) است. مقدار نوفه صفر تا 50 درصد روی نسبت خطایی تأثیر است. این عدد اندکی بزرگ‌تر از یک است و برتری اندک درونیابی اسپلاین را نسبت به درونیابی خطی نشان می‌دهد.

- در مورد میزان تأثیر نوفه روی نسبت‌های خطای رکوردهای شتاب، سرعت و تغییر مکان می‌توان مطالب زیر را به‌طور خلاصه بیان کرد:

- بیشترین تأثیر نوفه روی نسبت خطای رکوردهای شتاب مربوط به گام زمانی $0/004$ ثانیه و دامنه‌های برابر با معکوس فرکانس امواج (حالت ج) است. برای این حالت، نسبت خطا از حالت بدون نوفه تا 50 درصد نوفه، به اندازه $59/77$ درصد کاهش می‌یابد.

- مقدار نوفه روی نسبت خطای رکوردهای شتاب مربوط به

حالتی که رکورد تغییر مکان بدون نوفه است به $0/273$ برابر آن برای حالت نوفه 50 درصد می‌رسد.

۵- برای حالت ب گام زمانی $0/02$ ثانیه، مانند حالت ب گام زمانی $0/004$ ثانیه، رکوردهای تغییر مکان هیچ‌گونه حساسیتی به مقدار نوفه نشان ندادند و عدد نسبت خطا ثابت و برابر با $1/0464$ بود. نسبت خطای متناظر برای گام زمانی $0/004$ ثانیه برابر با $2/2951$ بود. این موضوع نشان می‌دهد که با افزایش گام زمانی، خطای درونیابی خطی نسبت به درونیابی اسپلاین کاهش چشمگیری پیدا کرده است، هرچند هنوز حدود 5 درصد خطای درونیابی خطی از خطای درونیابی اسپلاین بیشتر است.

۶- رکوردهای تغییر مکان حالت الف با گام زمانی $0/02$ ثانیه حساسیت بسیار کمی به نوفه از خود نشان دادند، به طوری که نسبت خطا به ازای نوفه صفر برابر با $3/9127$ و به ازای نوفه 50 درصد $3/8247$ بود که کاهش $2/25$ درصدی را نشان داد. به علاوه، این اعداد برتری حدود $3/9$ برابری درونیابی اسپلاین را نسبت به درونیابی خطی نشان می‌دهد.

در مجموع برای مقادیر بیشترین و کمترین نسبت‌های خطای رکوردهای شتاب، سرعت و تغییر مکان می‌توان مطالب زیر را به طور خلاصه بیان نمود:

- بیشترین نسبت خطای رکوردهای شتاب برابر با $2/295$ برای گام زمانی $0/004$ ثانیه و دامنه‌های برابر با معکوس فرکانس امواج (حالت ج) و مقدار نوفه صفر است. با افزایش نوفه از صفر تا 50 درصد برای این دسته از شتاب‌نگاشت‌ها کاهش شدید نسبت خطا ($59/8$ درصد کاهش) را شاهد هستیم (از عدد $2/295$ به $0/9233$ می‌رسیم).

- کمترین نسبت خطای رکوردهای شتاب برابر با $0/9130$ برای گام زمانی $0/02$ ثانیه و دامنه‌های برابر با فرکانس امواج (حالت ب) است. مقدار نوفه صفر تا 50 درصد روی نسبت خطایی تأثیر است. این عدد کوچک‌تر از یک است و برتری اندک درونیابی خطی را نسبت به درونیابی اسپلاین نشان می‌دهد.

برای حالت ج، مقدار نسبت خطا از حالت بدون نوفه تا ۵۰ درصد نوفه، به اندازه ۷۲/۷ درصد کاهش می‌یابد.

۲-۳- نتایج بررسی ۶۳ رکوردهای شتاب، سرعت و تغییر مکان دانلود شده از سایت PEER

با مراجعه به سایت PEER، هفت مورد از رکوردهای زلزله‌های مهم جهان انتخاب و دانلود گردید و مشاهده شد که برای هر زلزله‌ای، ۹ رکورد وجود دارد. از این ۹ رکورد، سه رکورد مربوط به شتاب، سه رکورد مربوط به سرعت و سه رکورد مربوط به تغییر مکان آن زلزله در آن ایستگاه خاص بود. رکوردها در سه راستای اصلی شمال-جنوب، شرق-غرب و جهت عمودی ثبت شده بودند.

مشخصات ۲۱ شتاب‌نگاشت به‌دست‌آمده از سایت PEER در جدول (۱) مشخص گردیده است. در این جدول مشخصات شتاب‌نگاشت‌ها آورده شده است که شامل سال وقوع زلزله، تعداد نقاط آن، نام ایستگاه، گام زمانی و بیشینه شتاب رکورد می‌باشد. نمودار میله‌ای نسبت خطاهای این شتاب‌نگاشت‌ها در شکل (۷) ترسیم شده است. محور قائم این نمودار به‌صورت لگاریتمی معکوس است.

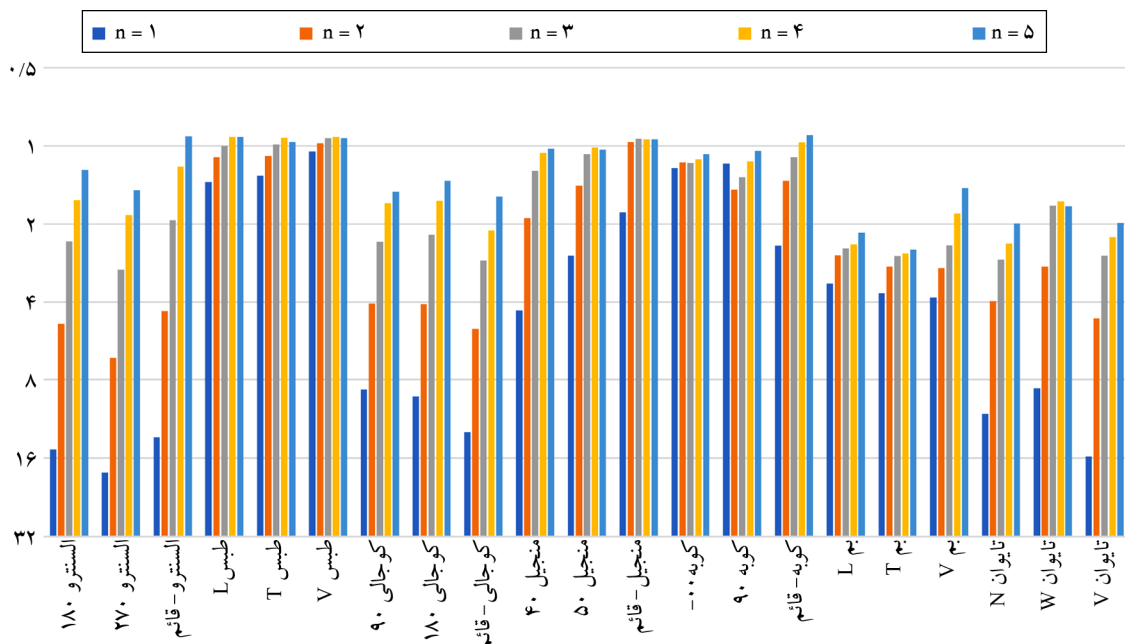
گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه برای حالت الف و ب بدون تأثیر است و برای حالت ج، مقدار نسبت خطا از حالت بدون نوفه تا ۵۰ درصد نوفه، به اندازه ۱۱/۵۷ درصد کاهش می‌یابد.

بیشترین تأثیر نوفه روی نسبت خطای رکوردهای سرعت مربوط به گام زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه و دامنه‌های برابر با معکوس فرکانس امواج (حالت ج) است. برای این حالت، نسبت خطا از حالت بدون نوفه تا ۵۰ درصد نوفه، به اندازه ۸۵/۷۷ درصد کاهش می‌یابد.

مقدار نوفه روی نسبت خطای رکوردهای سرعت مربوط به گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه برای حالت ب بدون تأثیر است و برای حالت الف، مقدار نسبت خطا از حالت بدون نوفه تا ۵۰ درصد نوفه، به اندازه ۱۷/۵۰ درصد کاهش می‌یابد.

بیشترین تأثیر نوفه روی نسبت خطای رکوردهای تغییر مکان مربوط به گام زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه و دامنه‌های برابر با معکوس فرکانس امواج (حالت ج) است. برای این حالت، نسبت خطا از حالت بدون نوفه تا ۵۰ درصد نوفه، به اندازه ۹۵/۲۱ درصد کاهش می‌یابد.

مقدار نوفه روی نسبت خطای رکوردهای تغییر مکان مربوط به گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه برای حالت ب بدون تأثیر است و



شکل (۷): نمودار میله‌ای نسبت جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی به جذر میانگین مربعات خطای متناظر درون‌یابی اسپلین مکعبی برای ۲۱ رکورد شتاب‌نگاشت مورد بررسی در این مقاله که از سایت PEER دانلود گردیده‌اند.

جدول (۱): مشخصات شتاب‌نگاشت‌های مورد استفاده در این مقاله.

نام شتاب‌نگاشت	سال وقوع زلزله	تعداد نقاط	جهت ثبت شتاب	نام ایستگاه	گام زمانی (ثانیه)	بیشینه شتاب (g)
السنتر	۱۹۴۰ م	۵۳۷۲	۱۸۰	امپریال ولی	۰/۰۱۰	۰/۲۸۱
السنتر	۱۹۴۰ م	۵۳۴۶	۲۷۰	امپریال ولی	۰/۰۱۰	۰/۲۱۱
السنتر	۱۹۴۰ م	۵۳۷۸	قائم	امپریال ولی	۰/۰۱۰	۰/۱۷۸
طیس	۱۹۷۸ م	۱۷۵۰	L	بشرویه	۰/۰۲۰	۱/۰۳۵
طیس	۱۹۷۸ م	۱۷۵۰	T	بشرویه	۰/۰۲۰	۰/۸۳۲
طیس	۱۹۷۸ م	۱۷۵۰	V	بشرویه	۰/۰۲۰	۰/۷۷۸
کوجالی ترکیه	۱۹۹۹ م	۶۰۰۰	۹۰	ازمیت	۰/۰۰۵	۰/۲۳۰
کوجالی ترکیه	۱۹۹۹ م	۶۰۰۰	۱۸۰	ازمیت	۰/۰۰۵	۰/۱۶۶
کوجالی ترکیه	۱۹۹۹ م	۶۰۰۰	قائم	ازمیت	۰/۰۰۵	۰/۱۴۵
چی چی تایوان	۱۹۹۹ م	۳۷۵۰۰	N	CHY002	۰/۰۰۴	۰/۱۳۷
چی چی تایوان	۱۹۹۹ م	۳۷۵۰۰	W	CHY002	۰/۰۰۴	۰/۱۱۰
چی چی تایوان	۱۹۹۹ م	۳۷۵۰۰	V	CHY002	۰/۰۰۴	۰/۰۹۸
منجیل	۱۹۹۰ م	۵۲۲۰	N40E	رودسر	۰/۰۱۰	۰/۰۹۷
منجیل	۱۹۹۰ م	۵۲۱۸	N50W	رودسر	۰/۰۱۰	۰/۰۸۶
منجیل	۱۹۹۰ م	۵۲۱۹	Up	رودسر	۰/۰۱۰	۰/۰۸۶
کوبه ژاپن	۱۹۹۵ م	۸۰۰۰	00	فوکوشیما	۰/۰۱۰	۰/۱۸۵
کوبه ژاپن	۱۹۹۵ م	۸۰۰۰	90	فوکوشیما	۰/۰۱۰	۰/۲۱۵
کوبه ژاپن	۱۹۹۵ م	۸۰۰۰	Up	فوکوشیما	۰/۰۱۰	۰/۱۹۸
بم	۲۰۰۳ م	۱۱۰۰۸	L	نصرت‌آباد	۰/۰۰۵	۰/۰۲۰
بم	۲۰۰۳ م	۱۱۰۰۸	T	نصرت‌آباد	۰/۰۰۵	۰/۰۲۴
بم	۲۰۰۳ م	۱۱۰۰۸	V	نصرت‌آباد	۰/۰۰۵	۰/۰۱۳

است. در این شکل کاملاً مشهود است که طیف قرمز رنگ، مؤلفه‌های فرکانسی بالاتری نسبت به طیف آبی رنگ دارد که با شدت قابل توجهی تا حدود فرکانس ۲۰ هرتز ادامه پیدا کرده است. این موضوع می‌تواند علت اصلی پایین بودن نسبت خطای آن نسبت به طیف آبی رنگ باشد. علاوه بر این گام زمانی شتاب‌نگاشت طیس ۰/۰۲ ثانیه است در حالی که گام زمانی شتاب‌نگاشت السنتر ۰/۰۱ ثانیه است که این موضوع می‌تواند دلیل ثانویه‌ای برای این موضوع باشد.

۲- کمترین نسبت جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی به خطای متناظر درون‌یابی اسپلاین آن مربوط به مؤلفه قائم شتاب‌نگاشت کوبه با نرخ کاهش داده‌های ۵ می‌باشد. به عبارتی دیگر، هرگاه نقاط این شتاب‌نگاشت به صورت پنج در میان حذف شود و سپس با استفاده از درون‌یابی خطی و نیز

با دقت در نمودار میله‌ای شکل (۷) نتایج زیر به دست می‌آید:

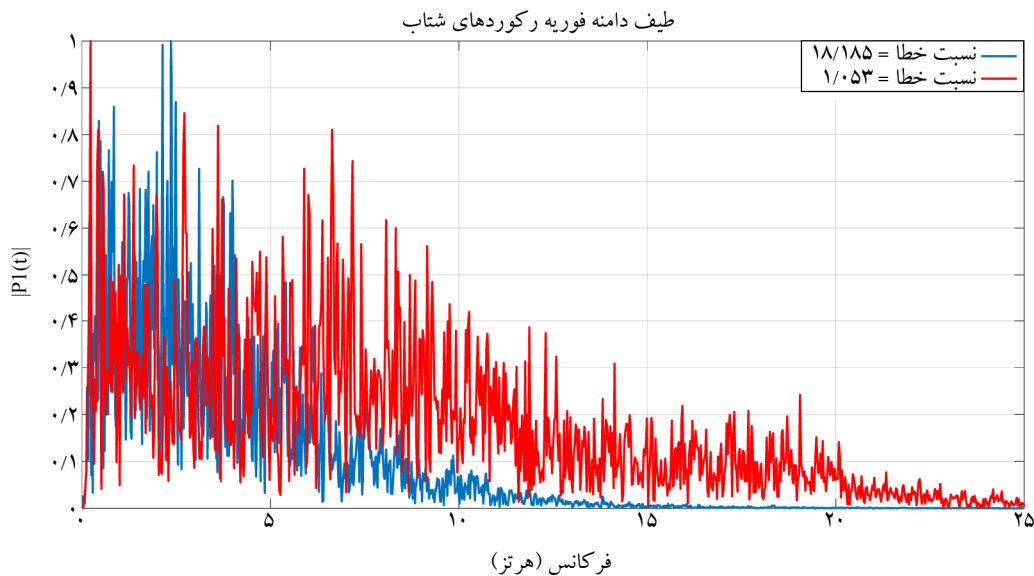
۱- بیشترین نسبت جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی به خطای متناظر درون‌یابی اسپلاین آن مربوط به شتاب‌نگاشت السنتر با جهت ثبت شتاب ۲۷۰ درجه می‌باشد که نرخ کاهش داده‌های آن یک می‌باشد. به عبارت دیگر، هرگاه این شتاب‌نگاشت به صورت یک در میان نقاط آن حذف شود و با استفاده از درون‌یابی خطی و نیز درون‌یابی اسپلاین، دوباره اعداد حذف شده به صورت تقریبی محاسبه گردند، خطای درون‌یابی خطی ۱۸/۱۸۵ برابر خطای درون‌یابی اسپلاین می‌باشد. کمترین نسبت خطا برای نرخ کاهش داده‌های یک مربوط به جهت قائم زلزله طیس است که مقدار آن ۱/۰۵۳۳ است. طیف دامنه فوریه این دو شتاب‌نگاشت که مقادیر حداکثر آنها به عدد یک هم‌پایه شده است در شکل (۸) آورده شده

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{3.166}{2.841} = 1.114 \quad (1)$$

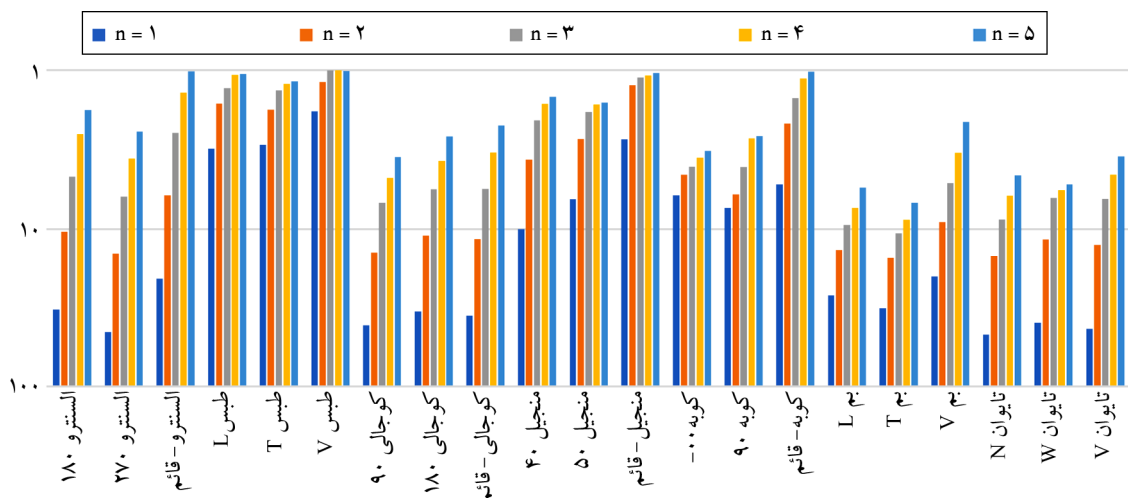
از آنجا که در فایل مربوط به هر یک از زلزله‌های دریافتی از سایت PEER شامل داده‌های سرعت و تغییر مکان هم بود، برای داده‌های سرعت و تغییر مکان هم نسبت جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی و اسپلاین به ازای نرخ کاهش داده‌های ۱ تا ۵ به دست آورده شد. در شکل‌های (۹) و (۱۰) به ترتیب نمودارهای میله‌ای نسبت جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی به جذر میانگین مربعات خطای متناظر درون‌یابی اسپلاین مکعبی برای رکوردهای سرعت و تغییر مکان آورده شده است.

درون‌یابی اسپلاین، دوباره پنج داده حذف شده به صورت تقریبی محاسبه گردند، جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی ۰/۹۱۰ برابر خطای درون‌یابی اسپلاین می‌باشد.

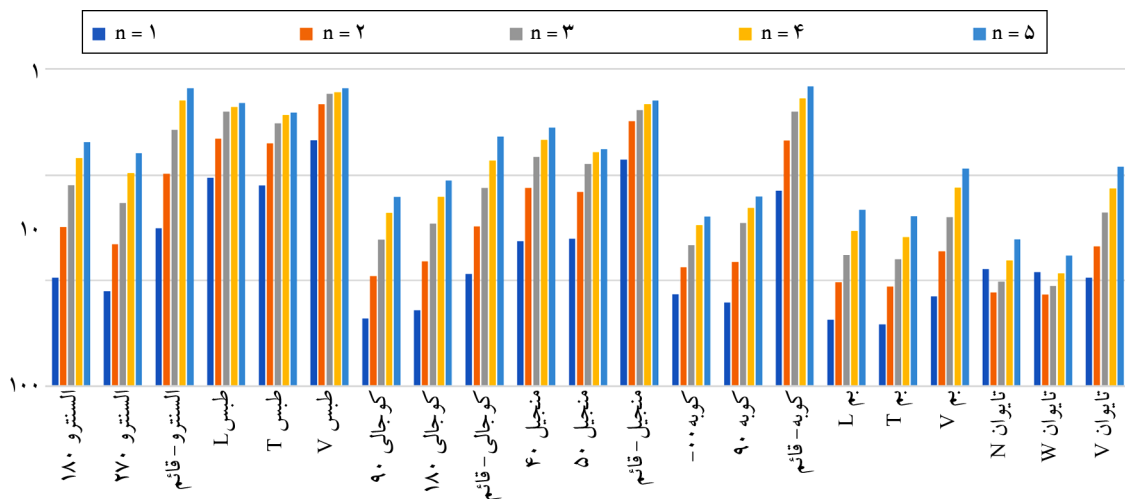
۳- شکل (۷) شامل ۱۰۵ نسبت خطای درون‌یابی خطی به درون‌یابی اسپلاین برای رکوردهای شتاب می‌باشد. از این ۱۰۵ عدد ۸۹ نسبت بزرگ‌تر از ۱ و ۱۶ نسبت کوچک‌تر از یک است که برتری قابل توجه (۸۴/۸ درصدی) درون‌یابی اسپلاین را نسبت به درون‌یابی خطی برای این شتاب‌نگاشت‌ها نشان می‌دهد. مقدار ضریب تغییرات برای این ۱۰۵ نسبت برابر است با:



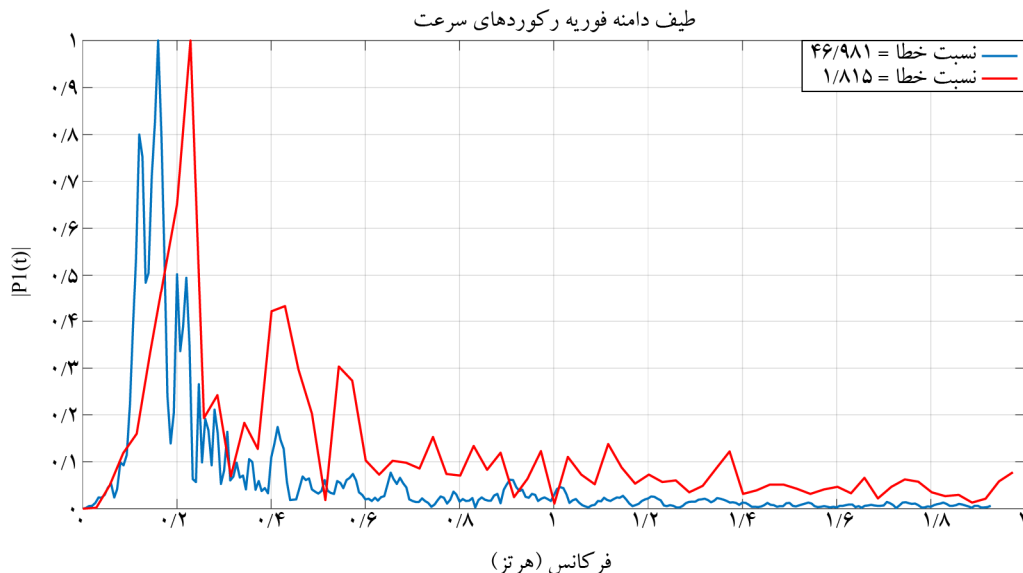
شکل (۸): طیف‌های دامنه فوری به شتاب‌نگاشت‌های با نسبت خطای حداکثر و حداقل برای نرخ کاهش داده‌های یک.



شکل (۹): نمودار میله‌ای نسبت جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی به جذر میانگین مربعات خطای متناظر درون‌یابی اسپلاین مکعبی برای ۲۱ رکورد سرعت مورد بررسی در این مقاله که از سایت PEER دانلود شده‌اند.



شکل (۱۰): نمودار میله‌ای نسبت جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی به جذر میانگین مربعات خطای متناظر درون‌یابی اسپلاین مکعبی برای ۲۱ رکورد تغییر مکان مورد بررسی در این مقاله که از سایت PEER دانلود شده‌اند.



شکل (۱۱): طیف‌های دامنه فوریه رکوردهای سرعت با نسبت خطای حداکثر و حداقل برای نرخ کاهش داده‌های یک.

داده‌ها برابر با ۱/۸۱۵ است که مربوط به رکورد سرعت جهت قائم زلزله طیس است. در شکل (۱۱) طیف دامنه فوریه این دو رکورد با یکدیگر مقایسه شده‌اند. فرکانس حاکم طیف قرمز رنگ برابر ۰/۲۲۹ هرتز است که ۱/۴۳ برابر فرکانس حاکم طیف آبی رنگ است. این موضوع و وجود نوفه‌های محیطی یا دستگاهی بیشتر برای طیف قرمز رنگ می‌تواند علت اختلاف بیش از حد نسبت خطای این دو رکورد باشد. علت دیگری که می‌توان برای این موضوع بیان نمود این است که گام زمانی رکورد تایوان ۰/۰۰۴ ثانیه

محور قائم این نمودارها نیز به صورت لگاریتمی معکوس است.

با دقت نمودار میله‌ای شکل (۹) برای رکوردهای سرعت نتایج زیر به دست می‌آید:

۱- بیشترین نسبت جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی به خطای متناظر درون‌یابی اسپلاین آن مربوط به مؤلفه شمالی (N) رکورد سرعت زلزله تایوان می‌باشد که نرخ کاهش داده‌های آن یک می‌باشد. مقدار این نسبت برابر ۴۶/۹۸۱ می‌باشد. کمترین نسبت خطا برای این نرخ کاهش

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{10.019}{7.177} = 1.396 \quad (2)$$

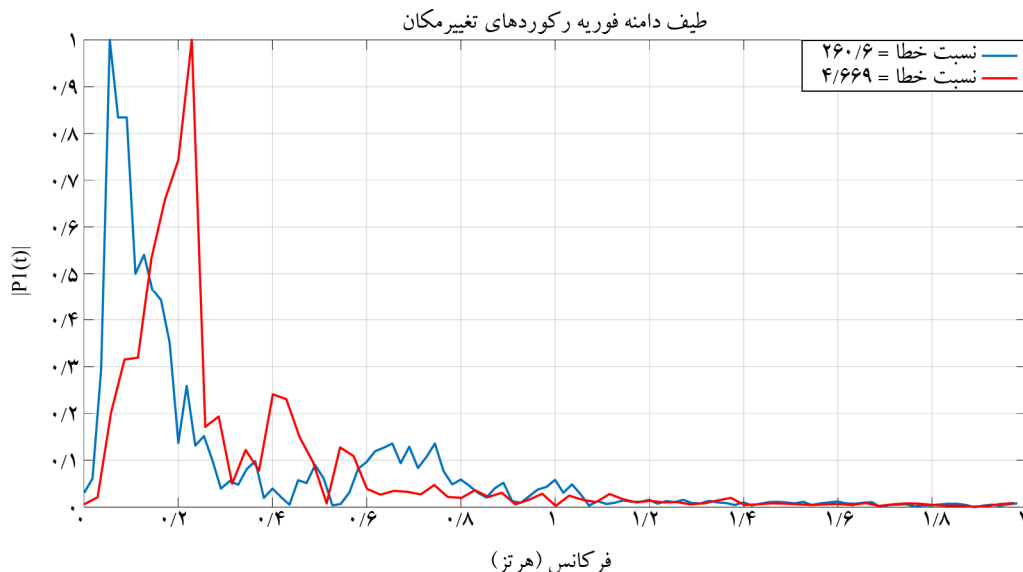
با دقت در نمودار میله‌ای شکل (۱۰) برای رکوردهای تغییر مکان نتایج زیر به دست می‌آید:

۱- بیشترین نسبت جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی به خطای متناظر درون‌یابی اسپلاین آن مربوط به رکورد تغییر مکان بم T می‌باشد که نرخ کاهش داده‌های آن یک می‌باشد. مقدار این نسبت برابر ۲۶۰/۵۹۷ می‌باشد. کمترین نسبت خطا برای این نرخ داده برابر با ۴/۶۶۹ است که مربوط به رکورد تغییر مکان قائم زلزله طبس است. در شکل (۱۲) طیف دامنه فوریه این دو رکورد رسم شده است. فرکانس غالب رکورد تغییر مکان طبس ۰/۲۲۹ هرتز است که ۴/۱۸ برابر طیف آبی‌رنگ است که این موضوع می‌تواند علت اختلاف بسیار زیاد نسبت خطای این دو رکورد باشد. علت دیگری که می‌توان برای این موضوع عنوان کرد این است که گام زمانی رکورد بم ۰/۰۰۵ ثانیه است اما گام زمانی رکورد طبس ۰/۰۲ ثانیه است در نتیجه، وجود یا عدم وجود نوفه می‌تواند روی رکورد بم نسبت به رکورد طبس تأثیر بیشتری بگذارد. در بخش ۳-۱ مشاهده شد رکوردهای با گام زمانی کوچک‌تر حساسیت بیشتری به وجود نوفه از خود نشان می‌دهند.

است اما گام زمانی رکورد طبس ۰/۰۲ ثانیه است در نتیجه، وجود یا عدم وجود نوفه می‌تواند اثر بیشتری روی رکورد تایوان نسبت به رکورد طبس بگذارد. در بخش ۳-۱ مشاهده شد رکوردهای با گام زمانی کوچک‌تر حساسیت بیشتری به وجود نوفه از خود نشان می‌دهند.

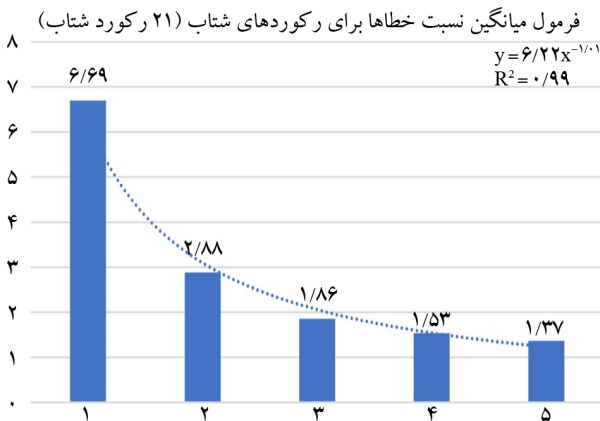
۲- کمترین نسبت جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی به خطای متناظر درون‌یابی اسپلاین آن مربوط به مؤلفه قائم داده سرعت طبس با نرخ کاهش داده‌های ۴ می‌باشد. به عبارت دیگر، هرگاه نقاط این شتاب‌نگاشت به صورت چهار در میان حذف شود و سپس با استفاده از درون‌یابی خطی و نیز درون‌یابی اسپلاین، دوباره چهار داده حذف شده به صورت تقریبی محاسبه شوند، جذر میانگین مربعات خطای درون‌یابی خطی ۰/۹۸۳ برابر خطای درون‌یابی اسپلاین می‌باشد.

۳- نمودار شکل (۹) شامل ۱۰۵ نسبت خطای درون‌یابی خطی به درون‌یابی اسپلاین برای رکوردهای سرعت می‌باشد. از این ۱۰۵ عدد، ۱۰۳ نسبت بزرگ‌تر از ۱ و ۲ نسبت کوچک‌تر از یک است که برتری خیلی زیاد درون‌یابی اسپلاین را نسبت به درون‌یابی خطی برای این رکوردهای سرعت نشان می‌دهد. مقدار ضریب تغییرات برای این ۱۰۵ نسبت برابر است با:

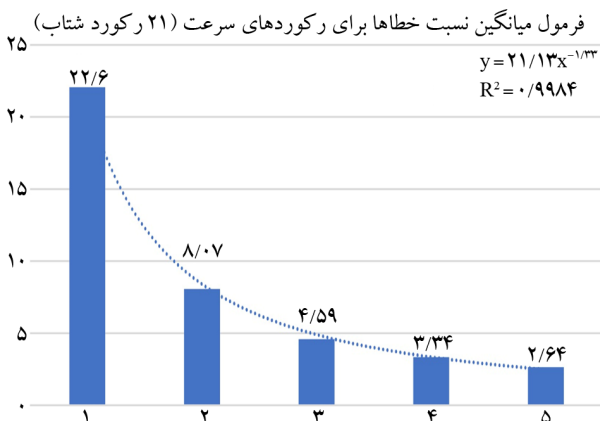


شکل (۱۲): طیف‌های دامنه فوریه رکوردهای تغییر مکان با نسبت خطای حداکثر و حداقل برای نرخ کاهش داده‌های یک.

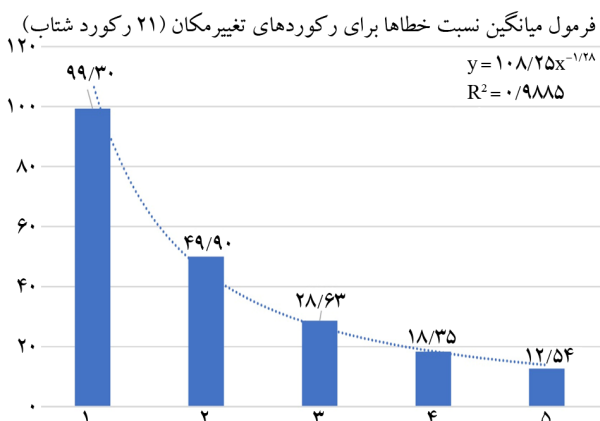
(شکل ۱۵) هم به همین ترتیب فوق عمل شد و سپس نمودارهای میله‌ای و روابط توانی به صورت جدول (۲) ارائه گردید.



شکل (۱۳): نمودار میله‌ای میانگین نسبت خطاها برای ۲۱ رکورد شتاب تکاشت مورد بررسی در این مقاله به همراه رابطه توانی پیشنهاد شده برای این نمودار.



شکل (۱۴): نمودار میله‌ای میانگین نسبت خطاها برای ۲۱ رکورد سرعت مورد بررسی در این مقاله به همراه رابطه توانی پیشنهاد شده برای این نمودار.



شکل (۱۵): نمودار میله‌ای میانگین نسبت خطاها برای ۲۱ رکورد تغییر مکان مورد بررسی در این مقاله به همراه رابطه توانی پیشنهاد شده برای این نمودار.

۲- کمترین نسبت جذر میانگین مربعات خطای درونیابی خطی به خطای متناظر درونیابی اسپلاین آن مربوط به مؤلفه قائم داده تغییر مکان کوبه با نرخ کاهش داده‌های ۵ می‌باشد. مقدار این نسبت برابر ۱/۴۵۱ است.

۳- شکل (۱۰) شامل ۱۰۵ نسبت خطای درونیابی خطی به درونیابی اسپلاین برای رکوردهای تغییر مکان است. از این ۱۰۵ نسبت همگی نسبت‌ها بزرگ‌تر از یک است که برتری کامل درونیابی اسپلاین را نسبت به درونیابی خطی برای این رکوردها نشان می‌دهد. مقدار ضریب تغییرات برای این ۱۰۵ نسبت برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{49.674}{37.017} = 1.342 \quad (3)$$

ضریب تغییرات، میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین را نشان می‌دهد. در نتیجه می‌توان گفت از لحاظ آماری میزان پراکندگی نسبت خطای رکوردهای شتاب که عدد ۱/۱۱۴ بود کمتر از رکوردهای سرعت و تغییر مکان است. همچنین، میزان پراکندگی رکوردهای سرعت (عدد ۱/۳۹۶) بیشتر از رکوردهای تغییر مکان (عدد ۱/۳۴۲) است. در مجموع، اعداد مربوط به نسبت‌های خطا برای هر سه رکورد تغییر مکان، سرعت و شتاب بسیار بالا است که بیانگر پراکندگی خیلی زیاد آنها است.

۳-۳-۳- ارائه روابط توانی برای میانگین نسبت خطای درونیابی خطی به درونیابی اسپلاین بر حسب نرخ کاهش داده‌ها

پس از محاسبه‌ی نسبت جذر میانگین مربعات خطا برای ۲۱ رکورد شتاب به ازای هر یک از مقادیر کاهش داده، از نسبت خطای ۲۱ رکورد شتاب متناظر نرخ کاهش داده میانگین گرفته شد. سپس با درونیابی میانگین‌ها بر حسب نرخ کاهش داده‌ها روابط توانی‌ای به دست آورده شد که همبستگی کاملاً مناسبی را نشان می‌دهد (شکل ۱۳).

برای رکوردهای سرعت (شکل ۱۴) و تغییر مکان

مجموع امواج سینوسی با فرکانس‌های مختلف و با درصد نوفه‌های مختلف تشکیل شده بودند، با گام زمانی ۰/۰۰۴ و ۰/۰۲ ثانیه در نظر گرفته شدند. با انتگرال‌گیری متوالی از آنها رکوردهای سرعت و تغییر مکان به دست آمد. با حذف یک‌درمیان نقاط این رکوردها، تعداد نقاط آنها کاهش یافت. سپس، نقاط حذف شده با استفاده از درون‌یابی خطی و درون‌یابی اسپلاین محاسبه شدند و با داشتن مقادیر واقعی نقاط حذف شده، جذر میانگین مربعات خطای این دو روش درون‌یابی محاسبه شدند و با یکدیگر مقایسه گردیدند. پارامتر نسبت خطای درون‌یابی خطی به درون‌یابی اسپلاین برای رکوردهای شتاب، سرعت و تغییر مکان که دارای گام زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه و بدون نوفه بودند برای حالت ج بیشترین مقدار را نسبت به حالت الف و ب داشتند. همچنین، این دسته از رکوردها بیشترین حساسیت را به نوفه از خود نشان دادند که البته حساسیت رکوردهای تغییر مکان این گروه بیشتر از رکوردهای سرعت این گروه و همچنین، حساسیت رکوردهای سرعت این گروه بیشتر از رکوردهای شتاب آن بود.

در گام بعدی، ۲۱ رکورد شتاب، سرعت و تغییر مکان زلزله‌های مختلف در نظر گرفته شد. جذر میانگین مربعات خطا به ازای نرخ کاهش داده‌های برابر با ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ با استفاده از درون‌یابی خطی و درون‌یابی اسپلاین برای این رکوردهای واقعی محاسبه گردید. مقایسه این خطاها نشان داد که خطای درون‌یابی خطی برای رکوردهای تغییر مکان بیشتر از خطای درون‌یابی اسپلاین برای رکوردهای متناظر سرعت می‌باشد. همچنین، مشاهده گردید خطای درون‌یابی خطی برای رکوردهای سرعت بیشتر از خطای درون‌یابی اسپلاین برای رکوردهای متناظر شتاب می‌باشد. همچنین، با افزایش نرخ کاهش داده‌ها، نسبت خطای درون‌یابی خطی به خطای متناظر درون‌یابی اسپلاین روندی کاهشی داشت. در پایان روابطی توانی برای میانگین نسبت خطای روش درون‌یابی خطی به خطای روش درون‌یابی اسپلاین بر حسب نرخ کاهش داده‌ها ارائه گردید که همبستگی کاملاً مناسبی با مقادیر متناظر واقعی‌شان داشت.

جدول (۲): روابط توانی پیشنهادی برای میانگین نسبت خطاهای رکوردهای شتاب، سرعت و تغییر مکان.

فرمول میانگین نسبت خطاها برای رکوردهای شتاب (۲۱ رکورد شتاب)	$y = 6/22 x^{-1/01}$
فرمول میانگین نسبت خطاها برای رکوردهای سرعت (۲۱ رکورد سرعت)	$y = 21/13 x^{-1/33}$
فرمول میانگین نسبت خطاها برای رکوردهای تغییر مکان (۲۱ رکورد تغییر مکان)	$y = 108/52 x^{-1/28}$

در شکل‌های (۱۳) تا (۱۵) چند نتیجه‌گیری بسیار مهم و مشهود می‌توان به دست آورد:

- نسبت خطای درون‌یابی خطی به اسپلاین با افزایش نرخ کاهش داده‌ها کاهش یافته و درون‌یابی اسپلاین کارایی کمتری را نشان می‌دهد و به عکس درون‌یابی خطی بهتر عمل می‌کند. ولی در هر صورت درون‌یابی اسپلاین نسبت به درون‌یابی خطی عملکرد بهتری را نشان می‌دهد.
- با تبدیل شدن رکورد شتاب به سرعت و همچنین سرعت به تغییر مکان، درون‌یابی اسپلاین عملکرد بهتری پیدا می‌کند و به عکس درون‌یابی خطی، خطای بیشتری را در درون‌یابی داده‌ها به دست می‌آورد.
- ضرایب ثابت روابط توانی مربوط به رکوردهای شتاب، سرعت و تغییر مکان به ترتیب اعداد ۶/۲۲، ۲۱/۱۳ و ۱۰۸/۵۲ است که این اعداد سیر صعودی دارند، به طوری که عدد ثابت مربوط به رکوردهای سرعت ۳/۴۰ برابر رکوردهای شتاب و عدد ثابت مربوط به رکورد تغییر مکان ۱۷/۴۰ برابر رکورد شتاب است. همچنین عدد ثابت مربوط به رکورد تغییر مکان ۵/۱۲ برابر رکورد سرعت است. این اعداد نشان می‌دهند که برای رکوردهای تغییر مکان باید انتظار نسبت خطاهایی به مراتب بزرگ‌تر از رکوردهای شتاب داشته باشیم. همچنین نسبت ضریب ثابت تغییر مکان به سرعت (عدد ۵/۱۲) بزرگ‌تر از نسبت ضریب ثابت سرعت به شتاب (عدد ۳/۴۰) است.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا تعدادی شتاب‌نگاشت مصنوعی که از

References

مراجع

- Burden, R.L., & Faires, J.D. (2011). *Numerical Analysis* (9th Ed.). Brooks/Cole.
- Chapra, S.C., & Canale, R.P. (2006). *Numerical Methods for Engineers* (5th Ed.). McGraw-Hill.
- Chopra, A.K. (2012). *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering* (4th Ed.). Prentice-Hall.
- Naeim, F. (1996). *Response of Instrumented Buildings to 1994 Northridge Earthquake* (Draft Report CSMIP).
- Vamvatsikos, D., & Cornell, C.A. (2004). Applied incremental dynamic analysis. *Earthquake Spectra*, 20(2), 523-553.

Quantitative Investigation of the Accuracy of Cubic Spline Interpolation Compared to Linear Interpolation for Earthquake Records

Masoud Mahmoudabadi^{1*} and Mohammad Ali Emami Bafroi²

1. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran,
*Corresponding Author, email: m.mahmoudabadi@qom.ac.ir
2. M.Sc., Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran

Given that the accelerograms recorded in various earthquakes are in the form of numerical data measured at short time intervals, the numerical evaluation of the dynamic response of structures is of great importance. In addition, during severe earthquakes, structures enter the nonlinear behavior range, and it is necessary to calculate the nonlinear behavior of structures using conventional numerical methods. Due to the small distance between the accelerogram points, the points are usually connected to each other by line segments. As a result, at the junction of the line segments, their slopes are not necessarily equal, and only the function values at their junctions are equal. Given that linear interpolation of excitation is one of the simplest interpolation methods, if the time intervals between the points are small compared to the natural period of the structure, linear interpolation is acceptable and provides sufficient accuracy. However, if the structure in question is highly rigid with a very small period—in other words, a very high frequency—the use of the linear excitation interpolation method can be challenging.

There are various methods for interpolating a function over an interval, each with its own advantages and disadvantages. Approximating an arbitrary function over a closed interval can be very inaccurate due to the oscillatory nature of polynomials. Furthermore, a small change in the function over a subinterval can have a large effect on the interpolating polynomial. For this reason, in practice, it is preferable to divide the interval into small subintervals and reduce the degree of the interpolating polynomial as much as possible. This approach is called piecewise polynomial approximation. The simplest of these polynomials are linear polynomials (degree one). The graph of these functions is a broken line connecting the set of points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ... and (x_n, y_n) . One of the disadvantages of this method is the lack of differentiability at the ends of the subintervals. The geometric interpretation of this is the non-smoothness of the graph. To overcome this problem, in the cubic spline method, third-degree polynomial functions are used for each subinterval. By setting the values of these functions and their first and second derivatives equal at the connection points, equations are obtained for calculating the unknown coefficients of these polynomials. Of course, at the beginning and end points of the interval, the values of the function must also be substituted to obtain two other equations in terms of the unknown coefficients of the third-degree polynomials. Additionally, at the beginning and end points of the interval, free boundary conditions (setting the second derivative of the third-degree functions to zero at the beginning and end of the interval) or restricted boundary conditions (setting the first derivative of the third-degree functions to zero at the beginning and end of the interval) must be used to obtain two other equations in terms of the unknown coefficients of the third-degree polynomials. By considering all these equations, the unknown coefficients of the third-degree polynomials are calculated. It should be noted that free boundary conditions were used in this study.

In this article, three accelerograms—El Centro, Tabas and Naghan—were considered and their velocity and displacement records were obtained by numerical integration. The time interval between the points of these three accelerograms was 0.02 seconds. Then, the number of points of records in the acceleration, velocity and displacement records was reduced with reduction rates of 1, 2, 3, 4 and 5. In the next step, the deleted data were calculated using linear interpolation and cubic spline interpolation, and the root mean square error (RMSE) of the calculated values was computed by comparing them to their actual values for both interpolation methods.

Subsequently, 21 records of acceleration, velocity and displacement from different earthquakes were downloaded from the PEER website. Unlike the previous three records, these records had varying time steps.

Similar to the previous three records, the RMSE was calculated for data reduction rates of 1, 2, 3, 4 and 5 using both linear interpolation and spline interpolation. The comparison of these errors showed that the linear interpolation error for displacement records is higher than the spline interpolation error for the corresponding velocity records. Additionally, it was observed that the linear interpolation error for velocity records is higher than the spline interpolation error for the corresponding acceleration records. Moreover, with the increase in data reduction rate, the ratio of linear interpolation error to the corresponding error of spline interpolation had a decreasing trend.

Finally, power relationships were developed for the average ratio of the linear interpolation error to the spline interpolation error as a function of the data reduction rate. These relationships showed a strong correlation with their actual corresponding values.

Keywords: Cubic Spline Interpolation, Linear Interpolation, Root Mean Square Error, Earthquake Acceleration, Velocity and Displacement Records, Curve Fitting