

چکیده

در این مقاله، پاسخ جابه‌جایی یک سیستم یک درجه آزاد سخت‌شونده غیرخطی، تحت طیفی از بارگذاری‌های سینوسی با فرکانس‌های مختلف و دامنه نیروهای متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. تغییرات سختی این سیستم، رابطه درجه ۲ با مقدار جابه‌جایی داشت. از ۹ روش عددی که شامل روش شتاب مرتبه ۳، روش شتاب مرتبه ۲، روش نیومارک (روش شتاب خطی)، روش نیومارک (روش شتاب متوسط)، روش ویلسون-تسا، روش تفاضل مرکزی، روش جینگز، روش جینگز ارتقاء یافته و روش ابداعی بود، برای محاسبه پاسخ جابه‌جایی این سیستم استفاده گردید. با استفاده از روش ابداعی و با استفاده از Δt برابر با ۰/۰۰۱ ثانیه، پاسخ جابه‌جایی سیستم محاسبه شد و به‌عنوان پاسخ دقیق سیستم قلمداد گردید. سپس، برای Δt های ۰/۰۰۱، ۰/۰۰۲، ۰/۰۰۴، ۰/۰۰۶، ۰/۰۰۸، ۰/۰۱ و ۰/۰۱ ثانیه و با استفاده از ۹ روش عددی معرفی شده در بالا پاسخ جابه‌جایی این سیستم به ازای دامنه بارگذاری‌های برابر با ۲۰۰، ۴۰۰، ۶۰۰، ۸۰۰ و ۱۰۰۰ نیوتن محاسبه گردید و مقادیر جذر میانگین مربعات خطا و ضریب تغییرات خطای این ۹ روش به ازای Δt های تعریف شده در بالا محاسبه شد که نتایج کار به‌صورت نمودارهایی میله‌ای در مقاله آورده شده است. در مجموع، روش ابداعی، روش جینگز ارتقا یافته و روش جینگز، به ترتیب صعودی کمترین میزان خطا را داشتند و بیشترین خطا مربوط به روش ویلسون بود. از لحاظ ضریب تغییرات، روش‌های ویلسون، نیومارک شتاب متوسط و تفاضل مرکزی، به ترتیب صعودی، کمترین ضریب تغییرات را دارا بودند و روش جینگز ارتقا یافته، بیشترین ضریب تغییرات را داشت.

واژگان کلیدی: روش شتاب مرتبه ۳، روش‌های عددی در دینامیک سازه‌ها، سیستم سخت‌شونده، جذر میانگین مربعات خطا، ضریب تغییرات خطا.

نوع مقاله: یادداشت پژوهشی

بررسی کمی میزان دقت روش شتاب مرتبه ۳ نسبت به روش‌های دیگر عددی برای بارگذاری هارمونیک؛ مطالعه موردی: یک سازه سخت‌شونده یک درجه آزاد

مسعود محمودآبادی (نویسنده مسئول)

استادیار، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران،
m.mahmoudabadi@qom.ac.ir

فاطمه انصاری

دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران

فاطمه هاتفی اردکانی

دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران

۱- مقدمه

هم مساوی در نظر می‌گیرند. در هر یک از این زیر بازه‌ها $(\Delta t = t/n)$ خصوصیات سازه مانند سختی ثابت در نظر گرفته شده و پاسخ در انتهای هر گام محاسبه می‌شود و سپس از این پاسخ به‌عنوان شرایط اولیه برای گام بعدی استفاده می‌شود. از بین روش‌های انتگرال‌گیری زمانی مشروط پایدار، روش‌های شتاب خطی نیومارک و تفاضل مرکزی به علت دقت خوب، بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند که در این دو روش کلاسیک، مرتبه تغییرات شتاب، حداکثر به‌صورت خطی تغییر می‌کند.

در حالت کلی، رفتار دینامیکی سازه‌ها به دو صورت خطی و غیرخطی در نظر گرفته می‌شود که معادله دیفرانسیل حاکم بر این سیستم‌ها یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خواهد بود به‌طوری که روش‌های حل آن به دو دسته کلی روش جمع آثار مدی و روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی دسته‌بندی می‌شود. در سیستم‌های خطی اگر پاسخ سازه در لحظه t مورد نظر باشد، طبق روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی، ابتدا بازه $[0, t]$ به n زیر بازه تقسیم شده که معمولاً طول این زیر بازه‌ها (Δt) را با

به صورت نمودارهای تاریخچه زمانی، پاسخ طبقات اول و دوم با پاسخ دقیق آنها مقایسه شده است. نقضی که به نظر می‌رسد در این مقاله (Gholampour et al., 2011) وجود دارد، این است که پاسخ‌های تقریبی با پاسخ‌های دقیق متناظرشان به صورت کیفی و نموداری مقایسه شده‌اند. در این مقاله، خطاهای ۹ روش مختلف عددی، به صورت کمی (عددی) محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در این مقاله، پاسخ جابه‌جایی یک سیستم یک درجه آزاد سخت‌شونده غیرخطی، تحت طیفی از بارگذاری‌های سینوسی با فرکانس‌های مختلف و دامنه نیروهای متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. فرکانس زاویه‌ای بارگذاری سینوسی از ۱ تا ۳۰ رادیان بر ثانیه با افزایش ۱/۱ رادیان بر ثانیه تغییر داده شد و بدین ترتیب پاسخ این سیستم تحت این ۲۹۱ بارگذاری سینوسی با ۹ روش عددی مطرح گردیده در این مقاله، محاسبه شده است. با استفاده از روش ابداعی و با استفاده از Δt برابر با ۰/۰۰۱ ثانیه پاسخ جابه‌جایی سیستم محاسبه و به عنوان پاسخ دقیق سیستم قلمداد شده است. سپس برای Δt های ۰/۰۰۱، ۰/۰۰۲، ۰/۰۰۴، ۰/۰۰۶، ۰/۰۰۸، ۰/۰۱ و ۰/۰۱ ثانیه و با استفاده از ۹ روش عددی معرفی شده در بخش‌های قبلی پاسخ جابه‌جایی این سیستم به ازای دامنه بارگذاری‌های برابر با ۲۰۰، ۴۰۰، ۶۰۰، ۸۰۰ و ۱۰۰۰ نیوتن محاسبه گردید و مقادیر جذر میانگین مربعات خطا برای Δt های تعریف شده در بالا محاسبه شد. برای مقایسه روش‌های مختلف با یکدیگر، میانگین خطاهای فرکانس‌های مختلف و نیز ضریب تغییرات آنها با یکدیگر مقایسه شده و نتیجه‌گیری‌های لازم انجام شده است. علاوه بر این، روش شتاب سهموی، به روش شتاب مرتبه سوم بسط داده شده و میزان خطای این روش و نیز ضریب تغییرات آن، با روش شتاب مرتبه دوم (سهموی)، مقایسه و نتیجه‌گیری‌های لازم انجام شده است.

غلامپور و همکاران (Gholampour et al., 2011) یک روش شتاب باقیمانده وزن‌دار با استفاده از چند تابع وزنی برای حل مسائل دینامیکی غیرخطی سازه‌ها ارائه نمودند. آنها مرتبه تغییرات شتاب را در هر گام زمانی به صورت سهموی فرض نمودند. در نتیجه چند جمله‌ای جابه‌جایی مربوطه از درجه ۴ بود

در مقاله غلامپور و همکاران (Gholampour et al., 2011)، مرتبه تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت سهموی فرض شده که در نتیجه چند جمله‌ای مرتبه چهار تابع جابه‌جایی، دارای پنج ضریب مجهول خواهد بود. در این تحقیق، این مقاله به عنوان مرجع اصلی در نظر گرفته شد با این تفاوت که مرتبه تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۳ در نظر گرفته شد. در نتیجه، در این حالت که شتاب به صورت چند جمله‌ای مرتبه سوم در نظر گرفته شد، تابع جابه‌جایی، یک تابع درجه ۵ با شش ضریب بود. با توجه به اینکه با افزایش مرتبه شتاب، تعداد جملات بیشتری در بسط سری تیلور نسبت به روش‌های کلاسیک موجود در نظر گرفته می‌شود بنابراین انتظار می‌رود که در روش پیشنهادی با مرتبه شتاب درجه ۳، دقت آن نسبت به روش‌های کلاسیک دیگر بالاتر باشد. در این روش برای محاسبه انتگرال باقیمانده وزن‌دار از روش حداقل مربعات استفاده شد. در این مقاله از قابلیت‌های نرم‌افزارهای محاسباتی مانند متلب (Matlab) استفاده شده است و به صورت کمی میزان دقت روش شتاب عددی درجه ۳ را با روش‌های کلاسیک دیگر مانند روش شتاب متوسط نیومارک، روش شتاب خطی نیومارک، روش ویلسون-تتا و روش شتاب سهموی که در مقاله غلامپور و همکاران (Gholampour et al., 2011) ارائه شده است، مقایسه گردیده است.

غلامپور و همکاران (Gholampour et al., 2011) فرمولاسیون روش شتاب سهموی را ارائه نموده‌اند. در این روش، تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۲ در نظر گرفته شده است. در این مقاله، تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۳ در نظر گرفته شده است که این موضوع نوآوری این مقاله است. نویسندگان این مقاله بر این باورند که بسط روش شتاب مرتبه ۳ برای اولین بار است که لااقل در ایران انجام می‌شود. لازم به ذکر است که در مقاله مذکور (Gholampour et al., 2011) پاسخ دقیق یک ساختمان برشی با رفتار غیرخطی تحت بارگذاری سینوسی محاسبه شده و سپس پاسخ تقریبی آن با روش نیومارک و روش شتاب سهموی محاسبه گردیده است و

تغییرات درجه دوم برای شتاب در هر گام زمانی فرض می‌گردید. آنها نتایج به‌دست آمده از این روش جدید مرتبه بالاتر را با روش تفاضل مرکزی و نیز روش شتاب خطی نیومارک مقایسه کردند. آنها اذعان داشتند که با توجه به مرتبه بالاتر تغییرات شتاب در هر گام زمانی نسبت به روش‌های کلاسیک، دقت این روش نسبت به روش‌های کلاسیک بالاتر است.

محمودآبادی و همکاران (Mahmoudabadi et al., 2023) روش جینگز را با استفاده از تابع درونیابی اسپلاین درجه سه ارتقاء دادند. آنها به‌صورت مقایسه‌ای مزیت‌ها و معایب روش جینگز که مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک بود را نسبت به روش درونیابی اسپلاین ارزیابی نمودند.

محمودآبادی و همکاران (Mahmoudabadi et al., 2023) طیف‌های شبه شتاب سه شتاب‌نگاشت ال‌سنتر، ناغان و طیس که با روش درونیابی خطی تحریک (روش جینگز) و نیز با استفاده از تابع اسپلاین مکعبی به دست آمده بودند، با یکدیگر مقایسه کردند. آنها سه شتاب‌نگاشت ال‌سنتر، ناغان و طیس در نظر گرفتند و طیف پاسخ شبه شتاب هم‌پایه شده (ضریب برش پایه) آنها برای مقادیر میرایی‌های مختلف با استفاده از روش درونیابی خطی و نیز درونیابی با تابع اسپلاین محاسبه کردند. آنها اذعان داشتند که مقادیر طیف شبه شتاب محاسبه شده با روش درونیابی اسپلاین در دوره تناوب‌های خیلی کوچک و میرایی‌های کم، اختلاف قابل ملاحظه‌ای با مقادیر متناظر طیف شبه شتاب محاسبه شده با روش درونیابی خطی دارد.

محمودآبادی و حسینی (Mahmoudabadi & Hosseini, 2023) طیف‌های پاسخ غیرخطی شبه‌شتاب سیستم‌های الاستوپلاستیک با شکل‌پذیری ثابت برای سه شتاب‌نگاشت که با روش درونیابی خطی تحریک و نیز با استفاده از تابع اسپلاین مکعبی به دست آمده بودند، با یکدیگر مقایسه کردند. طیف‌های پاسخ غیرخطی برای شکل‌پذیری‌های ۱، ۱/۵، ۲، ۴ و ۸ محاسبه شدند. برای بررسی جزئی‌تر، فاصله زمانی بین نقاط شتاب‌نگاشت‌ها به ترتیب به ۲، ۵، ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم گردیدند و شتاب‌نگاشت‌های جدیدی یک‌بار با استفاده از

و لازم بود که پنج ضریب مجهول این چندجمله‌ای محاسبه شود. آنها برای محاسبه این پنج ضریب مجهول از پنج معادله استفاده کردند. آنها سه معادله از این پنج معادله را از ارضای معادلات جابه‌جایی، سرعت و شتاب در ابتدای هر گام به دست آوردند. آنها دو معادله دیگر را با محاسبه انتگرال باقیمانده وزن‌دار و با چهار تابع وزنی؛ واحد، پترو گالرکین، حدافل مربعات و کالوکیشن به دست آوردند. آنها اذعان داشتند که از روش شتاب سهموی پاسخ‌های بهتر و دقیق‌تری حاصل می‌گردد.

قاسمیه و کریمی‌راد (Ghasemiye & Karimirad, 2011) یک روش جدید انتگرال‌گیری زمانی برای حل معادله حرکت پیشنهاد نمودند. آنها بیان داشتند که با افزایش مرتبه تغییرات شتاب به‌صورت سهموی، دقت انتگرال‌گیری افزایش می‌یابد و روش جدید به‌صورت غیرمشروط پایدار می‌باشد. آنها همچنین اذعان داشتند که در سازه‌های چند درجه آزادی برای میرا کردن اثر مدهای مصنوعی از پاسخ سازه بایستی از یک الگوریتم انتگرال‌گیری با میرایی عددی استفاده شود.

غلامپور و قاسمیه (Gholampour & Ghassemieh, 2012) یک روش جدید انتگرال‌گیری مستقیم زمانی برای حل مسائل دینامیکی غیرخطی سازه‌ای ارائه نمودند. در روش پیشنهادی آنها مرتبه انتگرال‌گیری زمانی آنها بالاتر از مرتبه انتگرال‌گیری خانواده روش‌های مرسوم نیومارک بود. آنها تغییرات شتاب را در هر گام زمانی به‌صورت درجه ۲ در نظر گرفتند. آنها دو پارامتر متغیر برای افزایش پایداری و دقت روش خود استفاده کردند. آنها نتایج به‌دست آمده از این روش جدید مرتبه بالاتر را با روش ضمنی ویلسون-تا و نیز روش شتاب متوسط نیومارک مقایسه کردند.

غلامپور و قاسمیه (Gholampour & Ghassemieh, 2010) یک روش جدید برای حل مسائل دینامیکی غیرخطی با استفاده از انتگرال‌گیری مستقیم زمانی پیشنهاد کردند. در روش پیشنهادی آنها که شامل مجموعه‌ای از روش‌های مستقیم انتگرال‌گیری زمانی بود، مرتبه انتگرال‌گیری بالاتر از روش‌های کلاسیک و متعارف بود. در روش پیشنهاد شده توسط آنها،

درون‌یابی خطی و یک‌بار با استفاده از درون‌یابی اسپلاین تولید گردید و طیف‌های پاسخ غیرخطی این دو نوع شتاب‌نگاشت با یکدیگر مقایسه شدند. نتایج کار حاکی از این موضوع بود که مقادیر بیشینه و کمینه اختلاف مقادیر قابل ملاحظه‌ای داشتند.

محمودآبادی و همکاران (Mahmoodabadi et al., 2024)، روش عددی شتاب مرتبه ۳ را ارائه نمودند. فرض اساسی این روش این بود که تغییرات شتاب در بازه زمانی Δt به صورت یک چندجمله‌ای درجه سوم باشد که در نتیجه، معادله تغییر مکان آن که با دو بار انتگرال‌گیری از معادله شتاب به دست می‌آید یک منحنی درجه پنج است که دارای شش ضریب مجهول می‌باشد. برای مقایسه کمی میزان خطای این روش با دیگر روش‌های مطرح عددی، یک سیستم یک درجه آزاد خطی با فرکانس یک هرتز و میرایی‌های مشخص ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد در نظر گرفته شد.

سپس، به این سیستم، بارگذاری هارمونیک سینوسی با فرکانس مشخص اعمال گردید. پاسخ دقیق این سیستم در کتب دینامیک سازه‌ها موجود است. نسبت فرکانس بارگذاری به فرکانس ارتعاش طبیعی سیستم از ۰/۰۱ تا ۳ با افزایش ۰/۰۱ تغییر می‌کرد. مقایسه برای ده Δt که کوچک‌ترین آنها برابر با ۰/۰۲ ثانیه و بزرگ‌ترین آنها برابر با ۰/۲۰ ثانیه بود انجام شد. میزان کاهش خطا برای روش شتاب مرتبه سه نسبت به روش شتاب مرتبه دوم ناچیز بود. کمترین خطا مربوط به روش جیننگز ارتقاء یافته و بیشترین خطا نیز در بعضی Δt ها مربوط به روش ویلسون و در سایر Δt ها مربوط به روش تفاضل مرکزی است.

چانگ (Chang, 2009) به بررسی روش ساده‌ی نیومارک پرداخت که بر اساس نتایج ارزیابی تحلیلی انجام شده بود. او اذعان داشت در حل گام‌به‌گام یک سیستم الاستیک خطی، یک گام زمانی مناسب می‌تواند بر پایه نتایج ارزیابی تحلیلی انتخاب شود؛ اگرچه هیچ راهی برای انتخاب یک گام زمانی مناسب برای انتگرال‌گیری دقیق یک سیستم غیرخطی وجود ندارد. او در این مطالعه بعد از معرفی درجه غیرخطی لحظه‌ای، ویژگی‌های عددی روش صریح نیومارک را به صورت تحلیلی

مورد ارزیابی قرار داد.

در ادامه در بخش ۲، روش شتاب مرتبه ۳ به تفصیل شرح داده شده است. همچنین در بخش‌های ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ مقاله، به ترتیب روش‌های شتاب مرتبه ۲، روش نیومارک، (روش شتاب متوسط و شتاب خطی)، روش ویلسون، روش تفاضل مرکزی و روش جیننگز و جیننگز ارتقاء یافته و در بخش ۸، روش ابداعی شرح داده شده است. در بخش ۹، سیستم یک درجه آزاد سخت‌شونده غیرخطی، تحت طیف وسیعی از بارگذاری‌های هارمونیک سینوسی قرار گرفته و خطاهای روش‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

در پایان و در بخش ۱۰، نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای کارهای بعدی آمده است.

۲- روش شتاب مرتبه ۳

معادله دیفرانسیل حرکت برای یک سازه یک درجه آزاد با رفتار خطی به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = P(t) \quad (1)$$

که در آن M ، C و K به ترتیب جرم، میرایی و سختی سازه است. $P(t)$ نیروی وارده به سازه و \dot{y} و \ddot{y} به ترتیب جابه‌جایی، سرعت و شتاب خواهند بود. در روش پیشنهادی، تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت یک چندجمله‌ای مرتبه سوم در نظر گرفته می‌شود که در نتیجه تغییرات مکان در هر گام زمانی به صورت یک تابع چند جمله‌ای کامل مرتبه پنج خواهد بود که این تابع به صورت رابطه زیر نوشته می‌شود:

$$y(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f \quad (2)$$

که در آن a تا f شش ضریب ثابت مجهول است که باید در هر گام زمانی محاسبه شوند.

با مشتق‌گیری از رابطه (۲) نسبت به زمان، توابع سرعت و شتاب به صورت روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\dot{y}(t) = 5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt + e \quad (3)$$

$$\ddot{y}(t) = 20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d \quad (4)$$

$$y(t) = a\Delta t^5 + b\Delta t^4 + c\Delta t^3 + d\Delta t^2 + e\Delta t + f \quad (12)$$

$$\dot{y}(t) = 5a\Delta t^4 + 4b\Delta t^3 + 3c\Delta t^2 + 2d\Delta t + e \quad (13)$$

$$\ddot{y}(t) = 20a\Delta t^3 + 12b\Delta t^2 + 6c\Delta t + 2d \quad (14)$$

۳- روش شتاب مرتبه ۲

در این روش شتاب در هر گام زمانی به صورت سهموی در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه تابع تغییر مکان یک چندجمله‌ای درجه چهار برحسب زمان است. فرمولاسیون این روش کاملاً شبیه به روش شتاب مرتبه ۳ می‌باشد که به لحاظ رعایت اختصار از آوردن آن صرف نظر شده است. روش شتاب مرتبه ۲ در مقاله غلامپور و همکاران (Gholampour et al., 2011) به طور کامل توضیح داده شده است.

۴- روش نیومارک (روش شتاب متوسط و شتاب خطی)

نیومارک در سال ۱۹۵۹ دو روش معروف موسوم به روش شتاب متوسط و روش شتاب خطی ارائه نموده است (Chang, 2009). در روش شتاب متوسط، تغییرات شتاب در هر گام زمانی ثابت فرض می‌شود، اما در روش شتاب خطی، تغییرات شتاب در هر گام زمانی خطی فرض می‌شود. روش شتاب متوسط، برای هر مقدار Δt ، هرچقدر بزرگ باشد، از نظر عددی پایدار است، اما روش شتاب خطی برای $\Delta t \leq T_n/55$ پایدار است. روابط و فرمولاسیون این روش در مقاله چانگ (Chang, 2009) آمده است.

۵- روش ویلسون

ویلسون روش شتاب خطی که به صورت مشروط پایدار بود را اصلاح نمود و آن را با اضافه کردن پارامتری به نام θ به صورت پایدار غیر مشروط درآورد. اگر $\theta = 1$ باشد، روش ویلسون به روش شتاب خطی تبدیل می‌گردد. اگر $\theta \geq 1/37$ باشد، روش ویلسون پایدار غیر مشروط است. به استناد مرجع (Chopra, 2017) مقدار $\theta = 1/42$ دقت بهینه دارد. در این مقاله از مقدار بهینه θ استفاده شده است.

برای محاسبه این شش ضریب ثابت مجهول در هر گام زمانی، به شش معادله نیاز داریم. سه معادله از ارضای روابط جابه‌جایی و سرعت و شتاب در ابتدای هر گام زمانی به دست می‌آید که به صورت رابطه (۵) است:

$$y(t=0) = f = y_0, \quad \dot{y}(t=0) = e = \dot{y}_0, \quad \ddot{y}(t=0) = 2d = \ddot{y}_0 \quad (5)$$

$$\text{از طرفی با ارضای معادله حرکت در ابتدای گام زمانی داریم:} \quad M_0 \ddot{y}_0 + C_0 \dot{y}_0 + K = p_0 \quad (6)$$

بنابراین با جایگذاری روابط (۵) در رابطه (۶) داریم:

$$M_0(2c) + C_0(d) + K(e) = p_0 \rightarrow c = \frac{p_0 - c.d + K.e}{2M} \quad (7)$$

معادله چهارم، طبق معادله (۸) از ارضای معادله حرکت در انتهای گام زمانی به دست می‌آید.

$$M_0 \ddot{y}_{\Delta t} + C_0 \ddot{y}_0 + K_0 y_{\Delta t} = p_{\Delta t} \quad (8)$$

$$M_0(20a\Delta t^3 + 12b\Delta t^2 + 6c\Delta t + 2d) + C_0(5a\Delta t^4 + 4b\Delta t^3 + 3c\Delta t^2 + 2d\Delta t + e) + K_0(a\Delta t^5 + b\Delta t^4 + c\Delta t^3 + d\Delta t^2 + e\Delta t + f) = p_{\Delta t} \quad (9)$$

همان‌طور که می‌دانیم در این روش عددی مانند روش‌های کلاسیک، دیگر به دلیل تقریبی بودن معادله تعادل حرکت در بازه $[0, t]$ به طور کامل ارضا نمی‌شود. در نتیجه یک تابع باقیمانده می‌توان تعریف کرد، به طوری که:

$$\text{remainder} = P - M\ddot{y} - C\dot{y} - Ky \quad (10)$$

که برای حداقل سازی این تابع باقیمانده از انتگرال باقیمانده وزنی استفاده می‌کنیم که:

$$\text{remainder} = P - M\ddot{y} - C\dot{y} - Ky \quad (11)$$

که در آن W_i تابع وزنی می‌باشد. غلامپور و همکاران (Gholampour et al., 2011) به طور کامل جزئیات محاسبه ضرایب مجهول f تا a توضیح داده‌اند. با محاسبه این شش ثابت مجهول در هر گام زمانی، پاسخ در انتهای هر گام زمانی با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

۶- روش تفاضل مرکزی

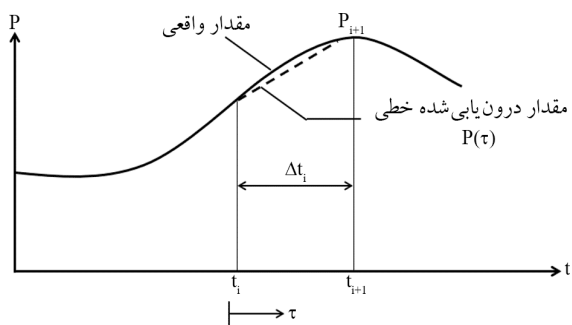
این روش مبتنی بر تقریب تفاضل محدود از مشتقات زمانی جابه‌جایی (یعنی سرعت و شتاب) است. این روش از روش‌های صریح است و پایدار مشروط است؛ یعنی اگر $\Delta t < T_n / \pi$ باشد، از نظر عددی روش پایدار است. جزئیات این روش در مقاله چانگ (Chopra, 2017) آمده است.

خطی جرم- فنر- میراگر عبارت است از:

$$\ddot{y}(t) = 20a \Delta t^3 + 12b \Delta t^2 + 6c \Delta t + 2d \quad (15)$$

که در آن u ، \dot{u} و \ddot{u} به ترتیب مقادیر جابه‌جایی، سرعت و شتاب جرم m می‌باشند.

روش جنینگز، روشی عددی برای حل معادله دیفرانسیل (۱۵) می‌باشد. این روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تابع تحریک $p(t)$ است که در شکل (۱) مشخص شده است.



شکل (۱): نمادهای مورد استفاده در درون‌یابی خطی تحریک (Chang, 2009).

تابع تحریک $p(\tau)$ در بازه زمانی $t_i \leq \tau \leq t_{i+1}$ را می‌توان به صورت یک تابع خطی برحسب τ به شکل زیر بیان کرد:

$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad (16)$$

که در آن $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$ و متغیر τ از صفر تا Δt_i تغییر می‌کند. جزئیات کار در مرجع (Chopra, 2017) توضیح داده شده است و در نهایت در این مرجع، معادلات بازگشتی زیر برای محاسبه u_{i+1} و \dot{u}_{i+1} ارائه شده است:

$$u_{i+1} = Au_i + B\dot{u}_i + Cp_i + Dp_{i+1} \quad (17)$$

$$\dot{u}_{i+1} = A'\dot{u}_i + B'\dot{u}_i + C'p_i + D'p_{i+1} \quad (18)$$

مقادیر هشت ضریب A, B, C, \dots, D' که در سمت راست روابط (۱۷) و (۱۸) وجود دارند، در مرجع (Chopra, 2017) آورده شده‌اند.

در روش جنینگز ارتقاء یافته، از درون‌یابی اسپلاین مکعبی به جای درون‌یابی خطی استفاده می‌شود، بدین صورت که در

۷- روش جنینگز و روش جنینگز ارتقاء یافته

روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک، روش متعارف و معمولی است که برای محاسبه پاسخ سازه‌ها در برابر زلزله در محدوده رفتار خطی از آن استفاده می‌شود. علت اصلی نام‌گذاری این روش به نام جنینگز، به مراجع (Nigam & Jennings, 1968a, Nigam & Jennings, 1968b) برمی‌گردد. در روش درون‌یابی خطی تحریک، نقاط شتاب‌نگاشت با پاره‌خط‌هایی به یکدیگر متصل می‌شوند. در نتیجه در محل اتصال پاره‌خط‌ها، شیب آنها لزوماً با یکدیگر برابر نیست و فقط مقادیر تابع در محل اتصال آنها با یکدیگر برابر است. لازم به ذکر است روش جنینگز مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک است و برای سیستم‌های یک و چند درجه آزاد دینامیکی خطی قابل استفاده است.

در این روش تنها فرضی که برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت این سیستم‌ها استفاده می‌شود، فرض خطی بودن تحریک در فاصله Δt است؛ به عبارت دیگر، سمت چپ معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت که به صورت معادله (۱۵) است، بدون هیچ‌گونه تغییری باقی می‌ماند و تنها فرض استفاده شده در این روش این است که سمت راست معادله حرکت تقریب زده می‌شود. تنها تقریب استفاده شده به این صورت است که تغییرات نیروی وارده به صورت خطی در بازه Δt در نظر گرفته می‌شود که در واقعیت مطمئناً به این صورت نیست.

معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم یک درجه آزادی

معادله دیفرانسیل (۲۰) برابر است با:

$$u_p(t) = c_3 \cos \omega_n t + c_4 \sin \omega_n t \quad (23)$$

مقادیر ثابت A و B با اعمال شرایط اولیه در ابتدای بازه Δt محاسبه می‌شوند.

همچنین، مقادیر ثابت c_1 ، c_2 ، c_3 و c_4 نیز با روش‌های مرسوم حل معادلات دیفرانسیل به دست می‌آیند.

۹- مقایسه مقادیر حداکثر و میانگین خطا برای ۱۰۰۱ نقطه

برای روش ابداعی، نیومارک شتاب متوسط و جینگز-

حالت غیر خطی ($a=2$)، $\Delta t=0/01$ ثانیه و $P_0=1000$ نیوتن

در این تحقیق، پاسخ جابه‌جایی سیستم مورد بحث، با گام زمانی $0/01$ ثانیه، به‌عنوان پاسخ دقیق سیستم قلمداد گردیده است. برای توجیه این کار، سیستم یک درجه آزاد سخت‌شونده مورد مطالعه، تحت طیفی از بارگذاری‌های سینوسی با فرکانس ۱ هرتز تا ۳۰ هرتز، با میزان افزایش $0/1$ هرتز (۲۹۱ فرکانس) با دامنه بارگذاری ۱۰۰۰ نیوتن (حداکثر دامنه بارگذاری) قرار گرفت و پاسخ این سیستم با گام زمانی حداکثر ($0/01$ ثانیه) محاسبه گردید.

سپس با سه روش (روش ابداعی، روش نیومارک شتاب متوسط و روش جینگز) و با گام زمانی $0/01$ ثانیه، پاسخ سیستم محاسبه شد و به‌عنوان پاسخ دقیق تلقی گردید و با کاهش تعداد نقاط، فاصله زمانی نقاط، از $0/01$ ثانیه به $0/01$ ثانیه، تغییر داده شد و حداکثر خطا و نیز میانگین خطاهای ۹ روش مطرح شده در این تحقیق، محاسبه گردید که نتایج کار در شکل‌های (۲) و (۳) آورده شده است.

با ملاحظه این دو شکل مشخص می‌گردد که عملاً تفاوت زیادی بین مقدار خطاهایی که به سه روش مذکور به دست می‌آید، مخصوصاً برای مقادیر میانگین خطا، وجود ندارد. اما با توجه به اینکه در روش ابداعی، تنها فرضی که در نظر گرفته می‌شود، ثابت بودن مقدار سختی در گام زمانی $0/01$ ثانیه است، به نظر این روش می‌تواند دقیق‌تر باشد.

سمت راست معادله (۱۵) یک تابع تحریک درجه سه $p(t)$ در بازه زمانی $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ به شکل زیر برحسب τ در نظر گرفته می‌شود:

$$p(\tau) = a_i \tau^3 + b_i \tau^2 + c_i \tau + d_i \quad (19)$$

در رابطه (۱۹)، a_i ، b_i ، c_i و d_i ضرایب ثابتی هستند که چگونگی محاسبه آنها در مرجع (Mahmoudabadi et al., 2023) آورده شده است. همچنین جزئیات دیگر این روش نیز در این مرجع به‌طور کامل توضیح داده شده است.

۸- روش ابداعی

با توجه به اینکه پاسخ تحلیلی (دقیق) سیستم‌های یک درجه آزاد خطی نسبت به بارگذاری هارمونیک سینوسی در کتب دینامیک سازه‌ها موجود می‌باشد (Chopra, 2017)، لذا می‌توان در هر بازه زمانی Δt فرض نمود که سختی سیستم یک درجه آزاد مقدار ثابتی است و در این بازه زمانی از فرمولاسیون موجود استفاده کرد. در ابتدای هر بازه زمانی، سیستم دارای t_0 می‌باشد که مقدار آن از صفر تا $(N-1)dt$ می‌تواند تغییر کند.

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + ku &= p_0 \sin \omega(t_0 + t) = \\ p_0 [\sin \omega t_0 \times \cos \omega t + \cos \omega t_0 \times \sin \omega t] &= \\ c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن مقدار t_0 همان‌طوری که در بالا ذکر گردید از صفر تا $(N-1)dt$ می‌تواند تغییر کند و $c_1 = p_0 \sin(\omega t_0)$ و $c_2 = p_0 \cos(\omega t_0)$ است. منظور از N تعداد نقاط بارگذاری سینوسی است. حل عمومی معادله دیفرانسیل (۲۰) عبارت است از:

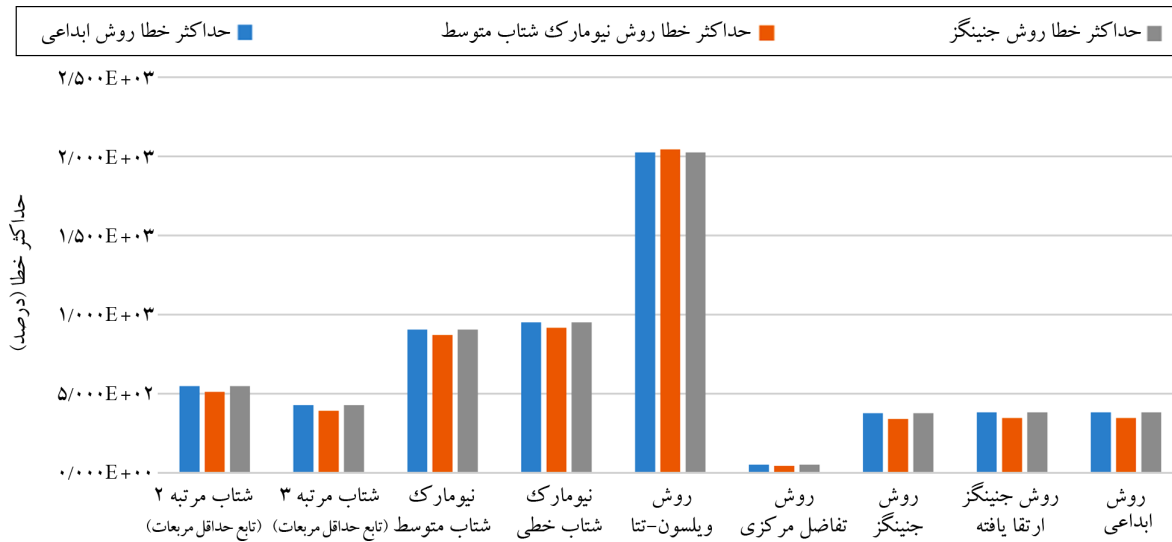
$$u_c(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \quad (21)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

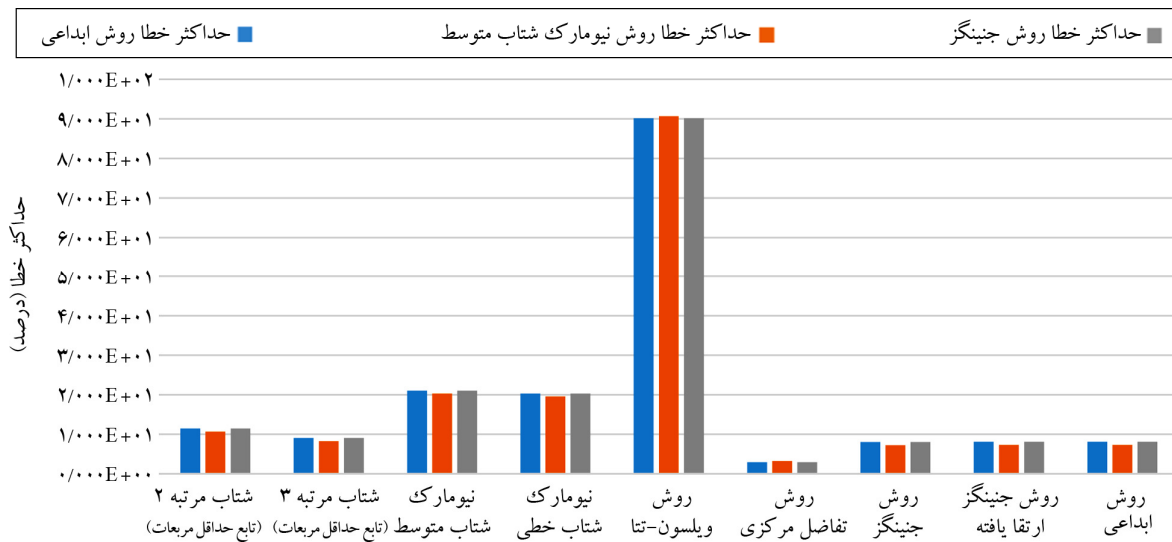
و حل خصوصی آن در حالتی که $\omega \neq \omega_n$ باشد (ω فرکانس بارگذاری سینوسی است) عبارت است از:

$$u_p(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (22)$$

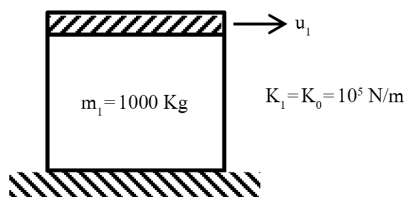
و در حالتی که $\omega = \omega_n$ باشد (حالت تشدید) حل خصوصی



شکل (۲): مقایسه مقادیر حداکثر خطا برای روش ابداعی، نیومارک شتاب متوسط و جینگز، $\Delta t = 0.1$ ثانیه و $P_0 = 1000$ نیوتن.



شکل (۳): مقایسه مقادیر میانگین خطا برای روش ابداعی، نیومارک شتاب متوسط و جینگز، $\Delta t = 0.1$ ثانیه و $P_0 = 1000$ نیوتن.



شکل (۴): مشخصات جرم و سختی سیستم یک درجه آزاد مورد بررسی.

۱۰۰۰ کیلوگرم برای هر طبقه آن معرفی شده است (شکل ۳). همچنین، سختی در نظر گرفته شده برای طبقه اول و دوم این مدل، مطابق رابطه (۲۴) می‌باشد:

۱۰- مقایسه کمی میزان دقت روش‌های مختلف عددی با یکدیگر

۱۰-۱- مشخصات جرم و سختی سیستم یک درجه آزاد سخت‌شونده غیرخطی مورد بررسی در این مقاله

در این مقاله، یک سیستم یک درجه آزاد سخت‌شونده بدون میرایی، با جرم ۱۰۰۰ کیلوگرم و سختی اولیه ۱۰۰۰۰۰ نیوتن بر متر مورد بررسی قرار گرفته است. مشخصات جرم و سختی این سیستم از (Chang, 2009) اخذ گردیده است. لازم به ذکر است در این مرجع یک سیستم برشی دو درجه آزاد بدون میرایی با جرم

پاسخ جابه‌جایی روش ابداعی برای Δt برابر با $0/001$ ثانیه به‌عنوان پاسخ دقیق قلمداد شده است، در نمودارهای میله‌ای ارائه شده در شکل‌های (۵) تا (۹) برای روش ابداعی به ازای Δt برابر با $0/001$ ثانیه مقداری قید نگردیده است.

با دقت در مقادیر عددی میانگین خطای روش‌های مختلف در شکل (۵)، نتایج زیر حاصل شد:

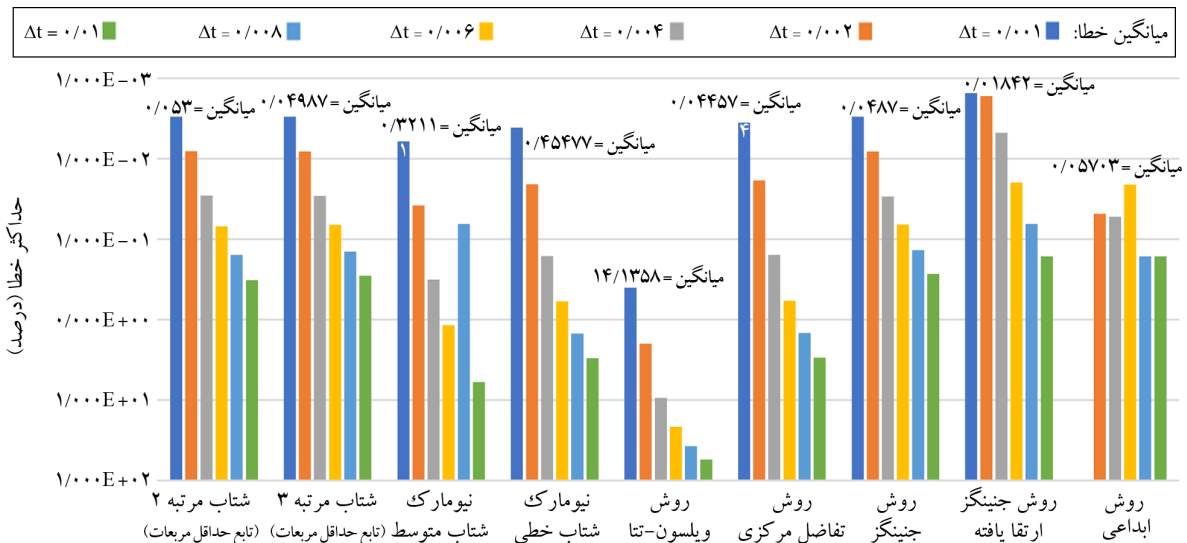
- مقدار حداقل میانگین خطای این ۹ روش مربوط به روش جنینگر ارتقاء یافته به ازای تمام Δt ها می‌باشد. کمترین مقدار خطا در این روش برابر با $10^{-3} \times 1/529$ درصد است که مربوط به $\Delta t = 0/001$ ثانیه است. برای Δt های $0/002$ ، $0/004$ ، $0/006$ ، $0/008$ و $0/01$ ثانیه به ترتیب مقادیر میانگین خطای این روش $10^{-3} \times 1/659$ ، $10^{-3} \times 4/742$ ، $10^{-2} \times 1/970$ ، $10^{-1} \times 6/422$ و $1/632$ درصد است. مشاهده می‌شود که با افزایش Δt مقدار میانگین خطا روندی افزایشی دارد.
- مقدار حداکثر میانگین خطا برای تمام Δt ها مربوط به روش ویلسون تا می‌باشد. با افزایش Δt مقدار حداکثر میانگین خطا افزایش می‌یابد، به طوری که برای $\Delta t = 0/001$ ثانیه میانگین خطا برابر با $0/4021$ درصد و برای Δt های $0/002$ ، $0/004$ ، $0/006$ ، $0/008$ و $0/01$ ثانیه به ترتیب مقادیر $1/999$ ، $9/408$ ، $21/51$ ، $37/36$ و $55/13$ درصد می‌باشد.

$$k = k_0 [1 + \alpha(u)^2] = 10^5 [1 + 2(\Delta u)^2] \quad (24)$$

در رابطه (۲۴)، Δu تغییر مکان نسبی طبقه است.

۲-۱۰- بررسی میانگین خطای روش شتاب مرتبه ۳ با دیگر روش‌های عددی به ازای Δt های مختلف

سیستم یک درجه آزاد سخت‌شونده غیرخطی معرفی شده در بخش ۹-۱ تحت طیف وسیعی از بارگذاری‌های هارمونیک سینوسی قرار گرفت. فرکانس زاویه‌ای بارگذاری سینوسی از ۱ تا ۳۰ رادیان بر ثانیه با افزایش $0/1$ رادیان بر ثانیه تغییر داده شد و بدین ترتیب پاسخ این سیستم تحت این بارگذاری سینوسی با ۹ روش عددی مطرح گردیده در بخش‌های قبلی محاسبه گردید. با استفاده از روش ابداعی و با استفاده از Δt برابر با $0/001$ ثانیه پاسخ جابه‌جایی سیستم محاسبه و به‌عنوان پاسخ دقیق سیستم قلمداد گردید. سپس، برای Δt های $0/001$ ، $0/002$ ، $0/004$ ، $0/006$ ، $0/008$ و $0/01$ ثانیه و با استفاده از ۹ روش عددی معرفی شده در بخش‌های قبلی پاسخ جابه‌جایی این سیستم به ازای دامنه بارگذاری‌های برابر با 200 ، 400 ، 600 ، 800 و 1000 نیوتن محاسبه گردید و مقادیر جذر میانگین مربعات خطا برای Δt های تعریف شده در بالا محاسبه شد که نتایج کار در شکل‌های (۵) تا (۹) به‌صورت نمودارهای میله‌ای آورده شده است. با توجه به اینکه



شکل (۵): میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای Δt از $0/001$ تا $0/01$ ثانیه ($\alpha = 2$) و $p_0 = 200$ نیوتن.

مرتب ۲ بدین صورت است که برای Δt های ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۲ به ترتیب ۰/۶۴ و ۲/۱۷ درصد افزایش و برای Δt های ۰/۰۰۴، ۰/۰۰۶، ۰/۰۰۸، ۰/۰۱ و ۰/۰۱ به ترتیب ۹/۲۰، ۱۴/۴۱، ۱۵/۹۷ و ۱۶/۶۹ درصد کاهش می یابد.

با دقت در مقادیر عددی میانگین خطای روش های مختلف در شکل (۷)، نتایج زیر حاصل گردید:

۱. مقدار حداقل میانگین خطا مربوط به روش جینگز ارتقاء یافته می باشد. کمترین مقدار خطا در این روش برابر با $9/611 \times 10^{-9}$ درصد که مربوط به $\Delta t = 0/001$ و بیشترین مقدار خطای این روش برابر با $1/108 \times 10^{-4}$ که مربوط به $\Delta t = 0/01$ بود و برای Δt های از ۰/۰۰۲ تا ۰/۰۰۸ ثانیه به ترتیب برابر $1/607 \times 10^{-7}$ ، $2/695 \times 10^{-6}$ ، $1/385 \times 10^{-5}$ و $4/460 \times 10^{-5}$ درصد می باشد.

۲. مقدار حداکثر میانگین خطا برای تمام Δt ها مربوط به روش ویلسون تا می باشد. با افزایش Δt مقدار حداکثر میانگین خطا افزایش می یابد، به طوری که برای $\Delta t = 0/001$ میانگین خطا برابر با ۰/۵۱۷۵ درصد و وقتی که $\Delta t = 0/01$ ثانیه می شود، میانگین خطا برای این روش به ۶۷/۸۹ می رسد و برای Δt های از ۰/۰۰۲ تا ۰/۰۰۸ ثانیه به ترتیب برابر ۲/۱۱۳، ۹/۹۸۴ و ۲۳/۸۵ و ۴۴/۱۶ درصد می باشد.

۳. میانگین خطای روش شتاب مرتبه ۳ نسبت به روش شتاب مرتبه ۲ بدین صورت است که برای Δt های ۰/۰۰۱، ۰/۰۰۲ و ۰/۰۰۴ به ترتیب ۰/۱، ۰/۵۴ و ۱/۳۷ درصد افزایش و برای Δt های ۰/۰۰۶، ۰/۰۰۸، ۰/۰۱ و ۰/۰۱ به ترتیب ۳/۸۸، ۸/۸۲ و ۱۱/۳۹ درصد کاهش می یابد.

با دقت در مقادیر عددی میانگین خطای روش های مختلف در شکل (۶)، نتایج زیر حاصل گردید:

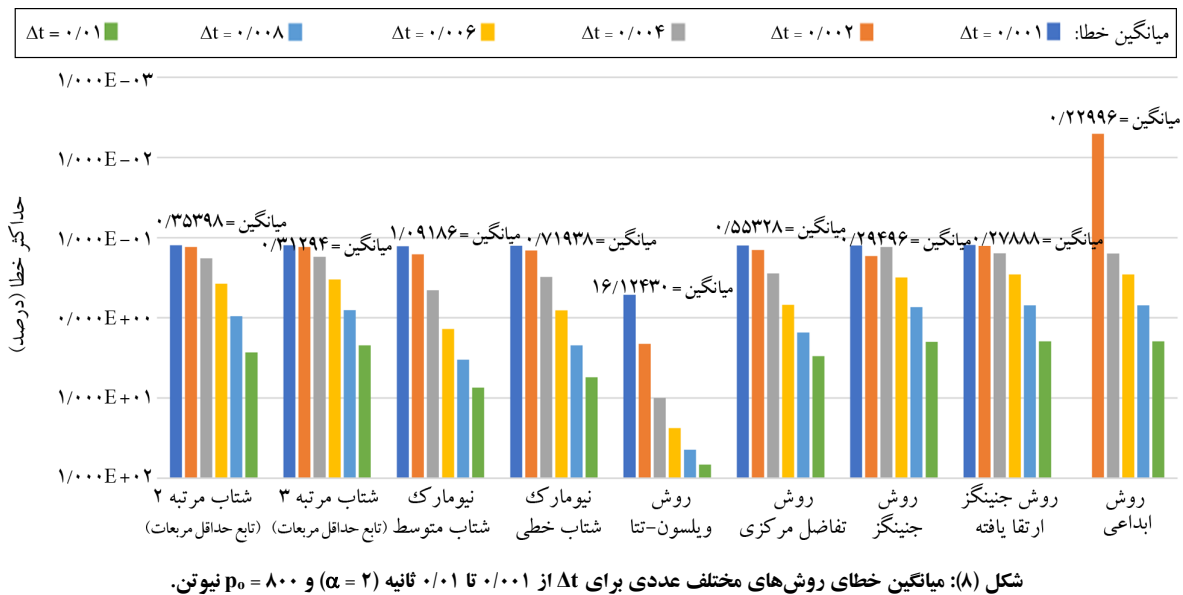
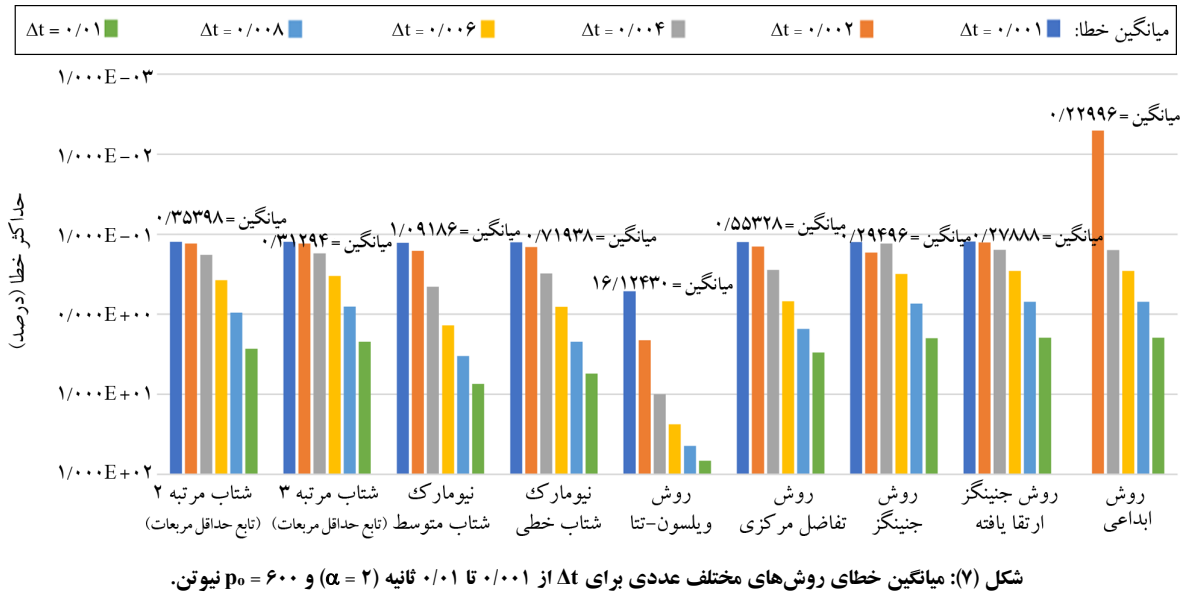
۱. مقدار حداقل میانگین خطا برای $\Delta t = 0/002$ مربوط به روش ابداعی است که مقدار آن برابر $1/111 \times 10^{-3}$ است و برای بقیه Δt ها مربوط به روش جینگز ارتقاء یافته است که به ترتیب برابر $7/109 \times 10^{-4}$ ، $1/378 \times 10^{-2}$ ، $7/841 \times 10^{-2}$ و ۰/۲۶۱ و ۰/۷۰۳ می باشد.

۲. مقدار حداکثر میانگین خطا برای تمام Δt ها مربوط به روش ویلسون تا می باشد. با افزایش Δt مقدار حداکثر میانگین خطا افزایش می یابد، به طوری که برای $\Delta t = 0/001$ میانگین خطا برابر با ۰/۳۹۹۵ درصد و وقتی که $\Delta t = 0/01$ ثانیه می شود، میانگین خطا برای این روش به ۵۸/۸۸ می رسد و برای Δt های از ۰/۰۰۲ تا ۰/۰۰۸ ثانیه به ترتیب برابر ۱/۹۹۵، ۹/۵۱۱، ۲۲/۰۵ و ۳۹/۰۷ درصد می باشد.

۳. میانگین خطای روش شتاب مرتبه ۳ نسبت به روش شتاب



شکل (۶): میانگین خطای روش های مختلف عددی برای Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۱ ثانیه ($\alpha = 2$) و $p_0 = 400$ نیوتن.



۱. مقدار حداقل میانگین خطا برای $\Delta t = 0.01$ ثانیه برابر با 0.4838 درصد و برای $\Delta t = 0.1$ ثانیه، 80.00 درصد است.

۲. مقدار حداکثر میانگین خطا برای تمام Δt ‌ها مربوط به روش ویلسون تتا می‌باشد. برای $\Delta t = 0.01$ ثانیه میانگین خطا برابر با 1.344 درصد می‌باشد.

۳. میانگین خطای روش شتاب مرتبه ۳ نسبت به روش شتاب مرتبه ۲ برای $\Delta t = 0.01$ ثانیه بدون تغییر و برای بقیه Δt کاهش می‌یابد که این کاهش به ترتیب 0.076 ، $4/57$ ، $1/5$ ، $16/06$ و $18/37$ درصد می‌باشد.

با دقت در مقادیر عددی میانگین خطای روش‌های مختلف در شکل (۸)، نتایج زیر حاصل گردید:

۱. مقدار حداقل میانگین خطا برای $\Delta t = 0.01$ ثانیه مربوط به روش جینگز ارتقا یافته با مقدار $9/275 \times 10^{-2}$ درصد و برای

است. برای Δt های از ۰/۰۰۲ تا ۰/۰۰۸ ثانیه به ترتیب برابر ۲/۱۱۲، ۱۰/۷۵، ۲۷/۱۳ و ۵۲/۰۵ درصد می باشد.

۳. میانگین خطای روش شتاب مرتبه ۳ نسبت به روش شتاب مرتبه ۲ برای $\Delta t = 0/001$ ثانیه ۰/۰۶۴ درصد افزایش و برای بقیه Δt ها به ترتیب ۰/۶۹، ۸/۴۷، ۱۵/۴۴، ۱۸/۴۲ و ۱۹/۷۷ درصد کاهش می یابد.

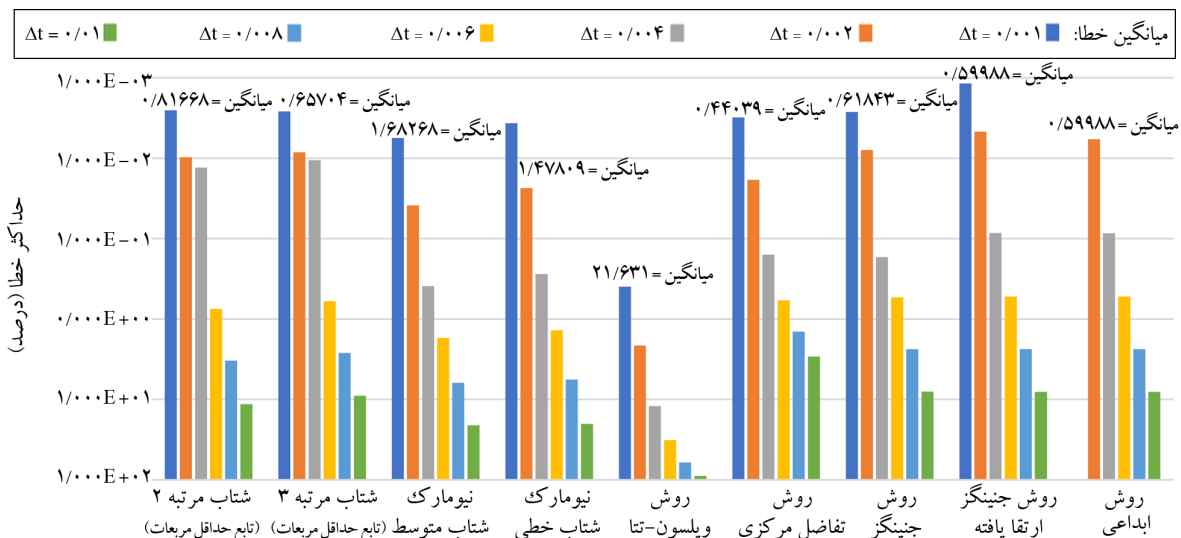
۱. مقدار حداقل میانگین خطا برای $\Delta t = 0/001$ و $\Delta t = 0/002$ ثانیه مربوط به روش جینگز ارتقا یافته، برای $\Delta t = 0/004$ ثانیه مربوط به روش شتاب مرتبه ۳، برای $\Delta t = 0/006$ ثانیه مربوط به روش جینگز ارتقا یافته، برای $\Delta t = 0/01$ ثانیه مربوط به روش تفاضل مرکزی است که مقادیر آن به ترتیب برابر $1/182 \times 10^{-3}$ ، $4/673 \times 10^{-2}$ ، $1/057 \times 10^{-2}$ ، $5/288 \times 10^{-1}$ و ۱/۴۳۵ و ۲/۹۵۰ درصد است. کمترین مقدار خطا برابر با

۲. مقدار حداکثر میانگین خطا برای تمام Δt ها مربوط به روش ویلسون تا می باشد. برای $\Delta t = 0/001$ میانگین خطا برابر با $10^{-1} \times 3/96$ درصد و برای $\Delta t = 0/008$ ثانیه، میانگین خطا $61/32$ درصد و برای Δt های از ۰/۰۰۲ تا ۰/۰۰۸ ثانیه به ترتیب برابر ۲/۱۴۹، ۱۲/۱۸، ۳۲/۱۱ و ۶۱/۳۲ درصد می باشد.

۳. میانگین خطای روش شتاب مرتبه ۳ نسبت به روش شتاب مرتبه ۲ برای $\Delta t = 0/001$ ثانیه ۳/۰۷ درصد کاهش و برای بقیه Δt ها به ترتیب ۱۳/۴۸، ۱۹/۵۶، ۱۹/۲۸، ۱۹/۶۴ و ۲۱/۰۵ درصد افزایش می یابد.

در شکل (۹)، نتایج زیر حاصل گردید:

جدول (۱) رتبه بندی خطاهای روش های مختلف به ترتیب صعودی و جدول (۲) مقادیر میانگین خطاهای روش های مختلف به ازای P_0 های مختلف را نشان می دهد.



شکل (۹): میانگین خطای روش های مختلف عددی برای Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۱ ثانیه $(\alpha = 2)$ و $p_0 = 1000$ نیوتن.

جدول (۱): رتبه بندی خطاهای روش های مختلف به ترتیب صعودی، به ازای P_0 های مختلف.

دامنه نیرو	روش ابداعی	روش جینگز ارتقا یافته	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش تفاضل مرکزی	نیومارک خطی	نیومارک شتاب متوسط	روش ویلسون-تتا
۱۰۰۰-۲۰۰	$2/675 \times 10^{-1}$	$2/767 \times 10^{-1}$	$2/958 \times 10^{-1}$	$3/167 \times 10^{-1}$	$3/785 \times 10^{-1}$	$4/845 \times 10^{-1}$	$8/287 \times 10^{-1}$	۲/۵۹۰	$1/700 \times 10^1$

جدول (۲): مقادیر میانگین خطاهای روش‌های مختلف به ازای P_۰ های مختلف.

مقادیر میانگین خطا									دامنه نیرو
روش جینگز ارتقا یافته	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش ابداعی	نیومارک شتاب متوسط	روش تفاضل مرکزی	نیومارک شتاب خطی	روش ویلسون- تتا	۲۰۰
۱/۸۴۲ × ۱۰ ^{-۱۰}	۴/۸۷۰ × ۱۰ ^{-۱۰}	۴/۹۸۷ × ۱۰ ^{-۱۰}	۵/۳۰۸ × ۱۰ ^{-۱۰}	۵/۷۰۳ × ۱۰ ^{-۱۰}	۳/۲۱۱ × ۱۰ ^{-۱۰}	۴/۴۵۷ × ۱۰ ^{-۱۰}	۴/۵۴۸ × ۱۰ ^{-۱۰}	۱/۴۱۴ × ۱۰ ^{-۱}	
روش جینگز ارتقا یافته	روش ابداعی	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش تفاضل مرکزی	نیومارک شتاب خطی	نیومارک شتاب متوسط	روش ویلسون- تتا	۴۰۰
۷/۱۰۹ × ۱۰ ^{-۱۰}	۷/۲۹۶ × ۱۰ ^{-۱۰}	۹/۱۹۸ × ۱۰ ^{-۱۰}	۱/۹۶۴ × ۱۰ ^{-۱۰}	۱/۱۷۱ × ۱۰ ^{-۱۰}	۴/۴۸۱ × ۱۰ ^{-۱۰}	۴/۹۲۶ × ۱۰ ^{-۱۰}	۹/۱۴۹ × ۱۰ ^{-۱۰}	۱/۴۶۱ × ۱۰ ^{-۱}	
روش ابداعی	روش جینگز ارتقا یافته	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش تفاضل مرکزی	نیومارک شتاب خطی	نیومارک شتاب متوسط	روش ویلسون- تتا	۶۰۰
۲/۳۰۰ × ۱۰ ^{-۱۰}	۲/۷۸۹ × ۱۰ ^{-۱۰}	۲/۱۹۸ × ۱۰ ^{-۱۰}	۲/۹۵۰ × ۱۰ ^{-۱۰}	۳/۱۲۹ × ۱۰ ^{-۱۰}	۳/۵۴۰ × ۱۰ ^{-۱۰}	۷/۱۹۴ × ۱۰ ^{-۱۰}	۱/۰۹۱۹	۱/۶۱۲ × ۱۰ ^{-۱}	
روش ابداعی	روش جینگز ارتقا یافته	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش تفاضل مرکزی	نیومارک شتاب خطی	نیومارک شتاب متوسط	روش ویلسون- تتا	۸۰۰	
۳/۷۷۸ × ۱۰ ^{-۱۰}	۴/۱۵۱ × ۱۰ ^{-۱۰}	۴/۲۵۰ × ۱۰ ^{-۱۰}	۴/۶۳۸ × ۱۰ ^{-۱۰}	۵/۳۴۸ × ۱۰ ^{-۱۰}	۵/۵۱۶ × ۱۰ ^{-۱۰}	۹/۹۸۹ × ۱۰ ^{-۱۰}	۸/۹۴۱	۱/۸۵۱ × ۱۰ ^{-۱}	
روش تفاضل مرکزی	روش جینگز ارتقا یافته	روش ابداعی	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	نیومارک شتاب خطی	نیومارک شتاب متوسط	روش ویلسون- تتا	۱۰۰۰
۴/۴۰۴ × ۱۰ ^{-۱۰}	۵/۹۹۹ × ۱۰ ^{-۱۰}	۵/۹۹۹ × ۱۰ ^{-۱۰}	۶/۱۸۴ × ۱۰ ^{-۱۰}	۶/۵۷۰ × ۱۰ ^{-۱۰}	۸/۱۶۷ × ۱۰ ^{-۱۰}	۱/۴۷۸ × ۱۰ ^{-۱۰}	۱/۶۸۳	۲/۱۶۳ × ۱۰ ^{-۱}	

درصد می‌باشد.

۱. کمترین ضریب تغییرات برای Δt برابر با ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۲ ثانیه مربوط به روش ویلسون، برای $\Delta t = ۰/۰۰۴$ ثانیه مربوط به روش شتاب مرتبه ۲، برای Δt برابر با ۰/۰۰۶ و ۰/۰۰۸ ثانیه مربوط به روش جینگز و برای $\Delta t = ۰/۰۱$ ثانیه مربوط به روش تفاضل مرکزی است که مقادیر آنها به ترتیب برابر ۱۸۶/۴ و ۱۳۳/۱، ۷۹/۶۸، ۱۰۹/۳، ۹۲/۴۱، ۶۶/۰۷ درصد می‌باشد.

با دقت در مقادیر عددی ضریب تغییرات روش‌های مختلف در شکل (۱۱)، نتایج زیر حاصل گردید:

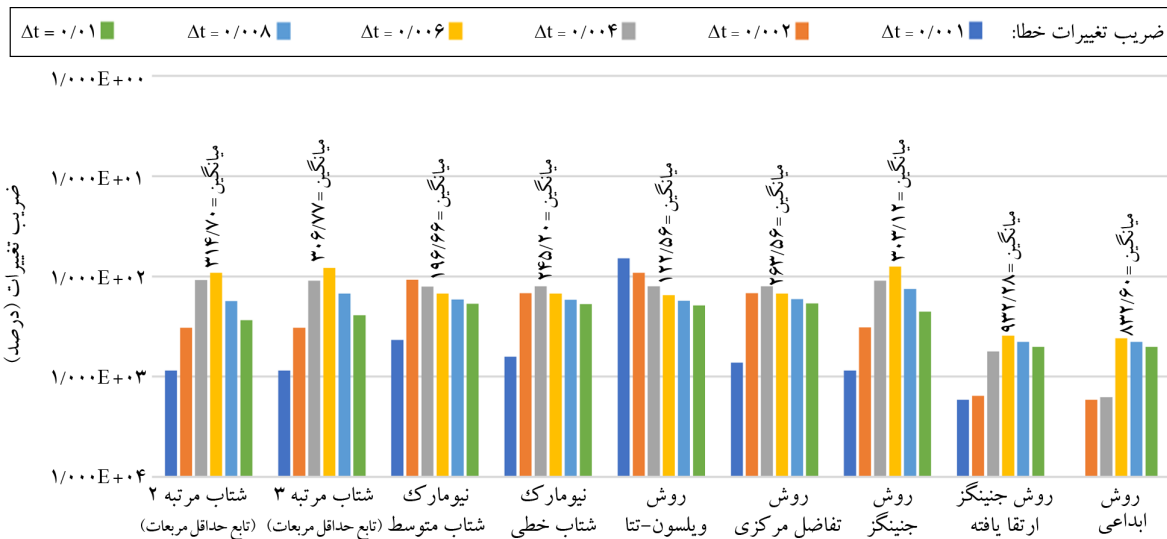
۱. بیشترین ضریب تغییرات برای Δt های ۰/۰۰۱، ۰/۰۰۲، ۰/۰۰۸ و ۰/۱ مربوط به روش جینگز ارتقا یافته است که مقادیر آن به ترتیب برابر ۱۷۰۵/۸، ۹۳۴/۰، ۴۵۰/۸ و ۵۱۹/۵ درصد است و برای Δt های ۰/۰۰۴، ۰/۰۰۶، ۰/۰۰۸ و ۰/۱ مربوط به روش ابداعی است که مقادیر آن به ترتیب برابر ۷۹۹/۹ و ۳۹۰/۱ درصد می‌باشد.

۳-۹- بررسی ضریب تغییرات خطای روش شتاب مرتبه ۳ با دیگر روش‌های عددی به ازای Δt های مختلف

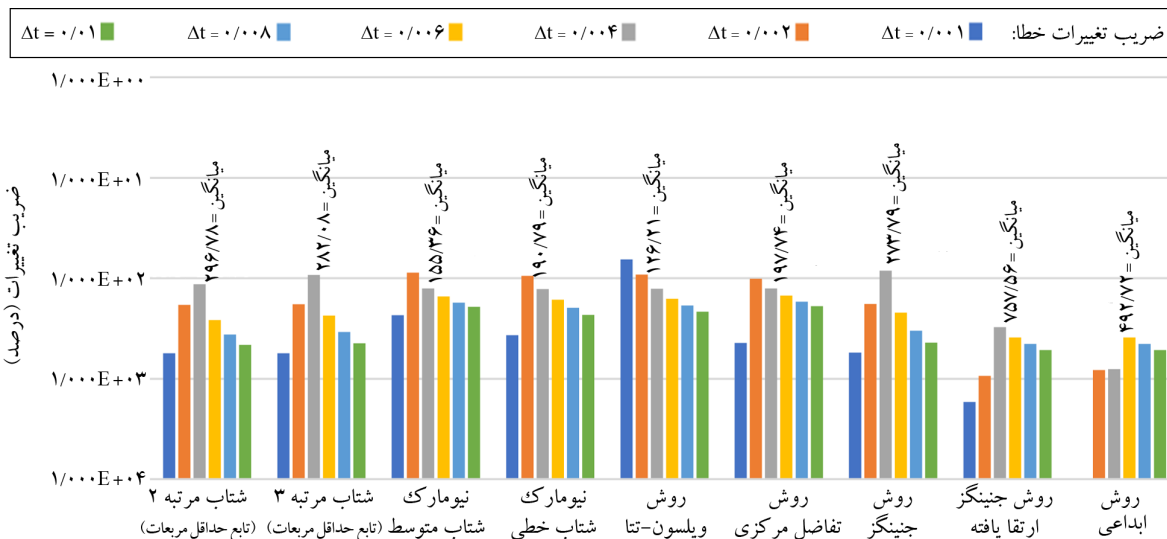
در نظریه آمار و احتمال، ضریب تغییرات (CV) ^۱ است یک معیار بدون بعد است که برای اندازه‌گیری توزیع داده‌های آماری به کار می‌رود که از تقسیم انحراف معیار بر میانگین به دست می‌آید. به عبارت دیگر ضریب تغییرات، میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین را بیان می‌کند. از ضریب تغییرات برای مقایسه پراکندگی دو یا چند صفت (متغیر) استفاده می‌کنند و کاربرد اصلی آن مقایسه متغیرهایی است که واحدهای سنجش متفاوتی دارند.

با دقت در مقادیر عددی ضریب تغییرات روش‌های مختلف در شکل (۱۰)، نتایج زیر حاصل گردید:

۱. بیشترین ضریب تغییرات برای $\Delta t = ۰/۰۰۱$ مربوط به روش جینگز ارتقا یافته است که مقدار آن ۱۷۰۵/۹ درصد و برای بقیه Δt ها مربوط به روش ابداعی است که مقادیر آن به ترتیب برابر ۱۷۰۰/۷، ۱۵۹۸/۷، ۴۱۴/۰، ۴۴۹/۶ و ۵۰۵/۷



شکل (۱۰): ضرب تغییرات خطای روش‌های مختلف عددی برای Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۱ ثانیه ($\alpha = 2$) و $p_0 = 200$ نیوتن.



شکل (۱۱): ضرب تغییرات خطای روش‌های مختلف عددی برای Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۱ ثانیه ($\alpha = 2$) و $p_0 = 400$ نیوتن.

۱. بیشترین ضرب تغییرات برای Δt های ۰/۰۰۱، ۰/۰۰۲، ۰/۰۰۶، ۰/۰۰۸ و ۰/۰۱ مربوط به روش جینگز ارتقاء یافته است که مقادیر آن به ترتیب برابر ۱۷۰۵/۹، ۱۶۸۸/۳، ۷۷۶، ۴۹۹/۳ و ۵۴۲/۵ درصد است و برای $\Delta t = 0/004$ مربوط به روش جینگز است که مقدار آن برابر ۱۶۲۸/۷ درصد می‌باشد.

۲. کمترین ضرب تغییرات برای Δt های ۰/۰۰۱، ۰/۰۰۲، ۰/۰۰۴ و ۰/۰۰۶ مربوط به روش ویلسون و برای Δt های ۰/۰۰۸ و ۰/۰۱ مربوط به روش تفاضل مرکزی است که مقادیر آنها به

۲. کمترین ضرب تغییرات برای $\Delta t = 0/001$ مربوط به روش ویلسون، برای $\Delta t = 0/002$ ثانیه مربوط به روش نیومارک شتاب متوسط، برای $\Delta t = 0/004$ ثانیه، مربوط به روش جینگز و برای Δt های ۰/۰۰۶، ۰/۰۰۸ و ۰/۰۱ مربوط به روش تفاضل مرکزی است که مقادیر آنها به ترتیب برابر ۸۸/۰، ۶۵/۱، ۸۴/۱۳، ۱۴۹/۴، ۱۷۱/۶، ۱۸۹/۳ درصد است.

با دقت در مقادیر عددی ضرب تغییرات روش‌های مختلف در شکل (۱۲)، نتایج ذیل حاصل گردید:

و ۰/۰۰۶ مربوط به روش ویلسون و برای Δt های ۰/۰۰۸ و ۰/۰۱ و ۰/۰۱ مربوط به روش تفاضل مرکزی است که مقادیر آنها به ترتیب برابر ۳۲۳/۷، ۱۱۲/۲، ۱۵۰/۶، ۲۰۶/۲، ۲۰۰/۲ و ۲۰۰/۳ درصد می‌باشد.

با دقت در مقادیر عددی ضریب تغییرات روش‌های مختلف در شکل (۱۴)، نتایج زیر حاصل گردید:

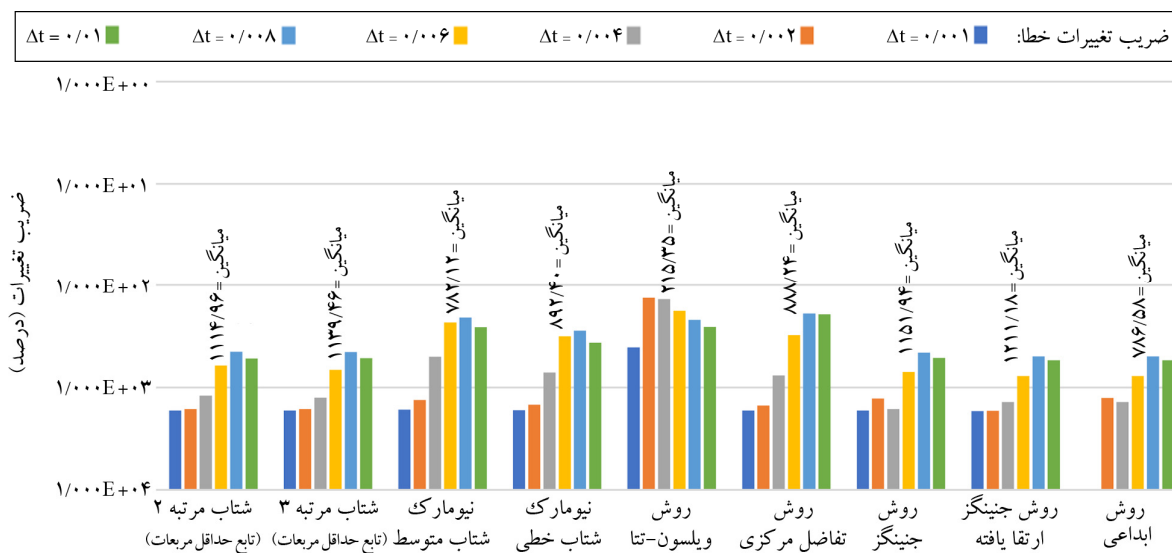
۱. بیشترین ضریب تغییرات برای $\Delta t = 0/001$ ثانیه مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته، برای $\Delta t = 0/002$ ثانیه مربوط به روش

ترتیب برابر ۴۰۷/۷، ۱۳۳/۰۵، ۱۳۷/۵، ۱۷۸/۷، ۱۹۰/۱ و ۱۹۳/۳ درصد می‌باشد.

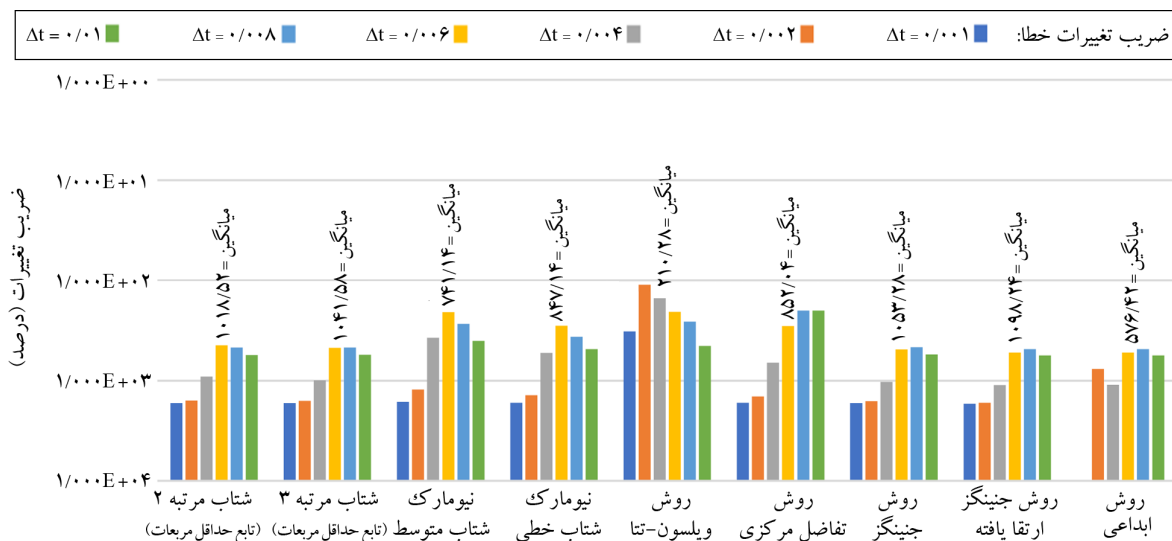
با دقت در مقادیر عددی ضریب تغییرات روش‌های مختلف در شکل (۱۳)، نتایج زیر حاصل گردید:

۱. بیشترین ضریب تغییرات برای همه Δt ها مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که مقادیر آن به ترتیب برابر ۱۶۶۵/۱، ۱۱۰۸/۲، ۵۲۵/۷، ۴۸۶/۳ و ۵۶۰/۱ درصد می‌باشد.

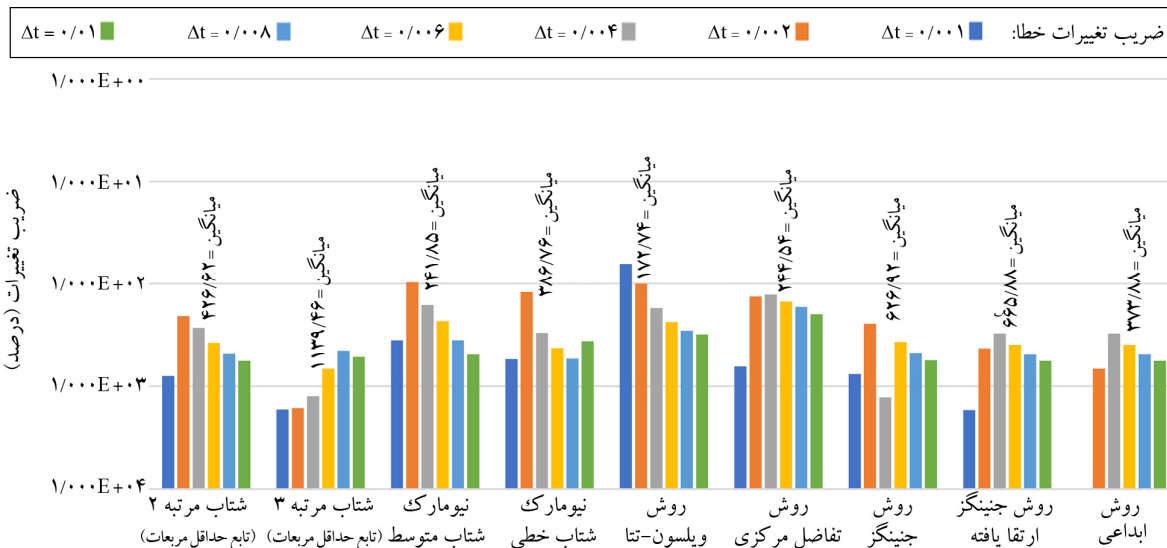
۲. کمترین ضریب تغییرات برای Δt های ۰/۰۰۱، ۰/۰۰۲، ۰/۰۰۴



شکل (۱۲): ضریب تغییرات خطای روش‌های مختلف عددی برای Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۱ ثانیه ($\alpha = 2$) و $p_0 = 600$ نیوتن.



شکل (۱۳): ضریب تغییرات خطای روش‌های مختلف عددی برای Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۱ ثانیه ($\alpha = 2$) و $p_0 = 800$ نیوتن.



شکل (۱۴): ضرب تغییرات خطای روش‌های مختلف عددی برای Δt از 0.001 تا 0.1 ثانیه ($\alpha = 2$) و $p_0 = 1000$ نیوتن.

شتاب مرتبه ۳، برای $\Delta t = 0.004$ ثانیه مربوط به روش جینگز، برای 0.008 و 0.01 مربوط به روش شتاب مرتبه ۳ و برای 0.04 و 0.06 ، روش نیومارک شتاب متوسط و برای 0.1 مربوط به روش تفاضل مرکزی است که مقادیر آنها به ترتیب برابر $63/58$ ، $96/87$ ، $128/1$ ، $149/6$ و 169 و $199/8$ درصد می‌باشد.

جدول (۳) مقادیر میانگین ضریب تغییرات خطاهای روش‌های مختلف و جدول (۴) رتبه‌بندی خطاهای روش‌های مختلف به ترتیب صعودی به ازای P_0 های مختلف را نشان می‌دهد.

جدول (۳) مقادیر میانگین ضریب تغییرات خطاهای روش‌های مختلف به ازای P_0 های مختلف.

۲. کمترین ضریب تغییرات برای $\Delta t = 0.001$ ثانیه مربوط به روش ویلسون تتا است و برای $\Delta t = 0.002$ ثانیه مربوط به

جدول (۳): مقادیر میانگین ضریب تغییرات خطاهای روش‌های مختلف به ازای P_0 های مختلف.

مقادیر میانگین خطا								دامنه نیرو
روش ویلسون-تتا	نیومارک شتاب متوسط	نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش ابداعی	۲۰۰
$1/226 \times 10^2$	$1/967 \times 10^2$	$2/452 \times 10^2$	$2/636 \times 10^2$	$3/031 \times 10^2$	$3/068 \times 10^2$	$3/148 \times 10^2$	$8/326 \times 10^2$	$9/323 \times 10^2$
روش تفاضل مرکزی	نیومارک شتاب متوسط	روش ویلسون-تتا	نیومارک شتاب خطی	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش ابداعی	۴۰۰
$1/893 \times 10^2$	$1/933 \times 10^2$	$2/156 \times 10^2$	$2/311 \times 10^2$	$4/365 \times 10^2$	$4/458 \times 10^2$	$4/599 \times 10^2$	$5/194 \times 10^2$	$5/195 \times 10^2$
روش تفاضل مرکزی	روش ویلسون-تتا	نیومارک شتاب متوسط	نیومارک شتاب خطی	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش ابداعی	۶۰۰
$2/300 \times 10^1$	$2/789 \times 10^1$	$2/198 \times 10^1$	$2/950 \times 10^1$	$3/129 \times 10^1$	$3/540 \times 10^1$	$7/194 \times 10^1$	$1/0919$	$1/612 \times 10^1$

ادامه جدول (۳).

مقادیر میانگین خطا									دامنه نیرو
روش ویلسون- تا	روش ابداعی	نیومارک شتاب متوسط	نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز ارتقا یافته	روش جینگز ارتقا یافته	۸۰۰
$2/103 \times 10^2$	$5/764 \times 10^2$	$7/411 \times 10^2$	$8/478 \times 10^2$	$8/520 \times 10^2$	$1/019 \times 10^3$	$1/042 \times 10^3$	$1/053 \times 10^3$	$1/098 \times 10^3$	
روش ویلسون- تا	نیومارک شتاب متوسط	روش تفاضل مرکزی	روش ابداعی	نیومارک شتاب خطی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز ارتقا یافته	روش جینگز ارتقا یافته	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	۱۰۰۰
$1/727 \times 10^2$	$2/419 \times 10^2$	$2/445 \times 10^2$	$3/739 \times 10^2$	$3/868 \times 10^2$	$4/266 \times 10^2$	$6/269 \times 10^2$	$6/659 \times 10^2$	$1/139 \times 10^3$	

 جدول (۴): رتبه‌بندی خطاهای روش‌های مختلف به ترتیب صعودی، به ازای P_0 های مختلف.

مقادیر میانگین خطا									دامنه نیرو
روش ویلسون- تا	نیومارک شتاب متوسط	روش تفاضل مرکزی	روش ابداعی	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جینگز ارتقا یافته	روش جینگز ارتقا یافته	۲۰۰-۱۰۰۰
$1/694 \times 10^2$	$4/234 \times 10^2$	$4/892 \times 10^2$	$5/126 \times 10^2$	$6/124 \times 10^2$	$6/343 \times 10^2$	$6/818 \times 10^2$	$7/819 \times 10^2$	$9/330 \times 10^2$	

۱۱- نتیجه‌گیری

بیشترین خطا مربوط به روش ویلسون می‌گردد. از لحاظ ضریب تغییرات، روش‌های ویلسون، نیومارک شتاب متوسط و تفاضل مرکزی، به ترتیب صعودی، کمترین ضریب تغییرات را دارا بودند و روش جینگز ارتقا یافته، بیشترین ضریب تغییرات را داشت.

در این مقاله، یک سیستم یک درجه آزاد سخت‌شونده در نظر گرفته شد و به آن طیف وسیعی از بارگذاری‌های سینوسی اعمال گردید و با ۹ روش عددی، پاسخ جابه‌جایی این سیستم به ازای Δt ها و دامنه نیروهای مختلف محاسبه گردید. نتایج بررسی‌ها نشان داد که با تغییرات Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۱ ثانیه در اکثر موارد حداقل مقدار میانگین خطا مربوط به روش جینگز ارتقاء یافته و حداکثر مقدار میانگین خطا در اکثر موارد مربوط به روش ویلسون می‌باشد. در مورد ضریب تغییرات تقریباً عکس این مطلب صادق است. به عبارتی دیگر، با تغییرات Δt از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۱ ثانیه در اکثر موارد حداکثر مقدار ضریب تغییرات خطا مربوط به روش جینگز ارتقاء یافته و حداقل مقدار ضریب تغییرات خطا در اکثر موارد مربوط به روش ویلسون می‌باشد. همچنین مشاهده گردید با افزایش دامنه نیرو از ۲۰۰ تا ۱۰۰۰ نیوتن، حداقل مقدار میانگین خطا در اکثر موارد مربوط به روش جینگز ارتقاء یافته و حداکثر مقدار میانگین خطا در اکثر موارد مربوط به روش ویلسون است.

در مجموع، روش ابداعی، روش جینگز ارتقا یافته و روش جینگز، به ترتیب صعودی کمترین میزان خطا را داشتند و

References

مراجع

- Chang, S.Y. (2009). Accurate integration of nonlinear systems using Newmark explicit method. *Journal of Mechanics*, 25(3), 289-297.
- Chopra, A. (2017). *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering* (3rd ed.). Prentice-Hall.
- Ghasemiye, M., & Karimirad, M. (2011). Time integration of dynamic structural problems using the Newmark acceleration method. *Journal of Civil Engineering and Surveying*, 45, 35-43 (in Persian).
- Gholampour, A.A., & Ghassemieh, M. (2010). A weighted residual quadratic acceleration time integration method in nonlinear structural dynamics. *Proceedings of the Second International Conference on Computer Research and Development (ICAPM)*, Kuala Lumpur, Malaysia.
- Gholampour, A.A., & Ghassemieh, M. (2012). New practical approach to nonlinear dynamic analysis of

structures: Refinement of Newmark's and Wilson's classical methods. *Practice Periodical on Structural Design and Construction*, 17(1), 30-34.

Gholampour, A.A., Ghasemiye, M., & Fallahnejad, H. (2011). Direct time integration method for nonlinear structural problems. *Proceedings of the 6th National Congress on Civil Engineering*, Semnan University, Semnan, Iran (in Persian).

Mahmoodabadi, M., & Hosseini, S.M.J. (2023). Comparison of the nonlinear response spectra of elastoplastic systems resulting from two stimulation interpolation methods. *Imran Ferdowsi Engineering*. Online publication: November 23 (in Persian).

Mahmoodabadi, M., Hatefi Ardakani, F., & Ansari, F. (2024). Quantitative comparison of the accuracy of the 3rd order numerical acceleration method with other numerical methods. *Imran Ferdowsi Engineering*. Online publication: July 21. doi: 10.22067/jfcei.2024.85785.1276 (in Persian).

Mahmoodabadi, M., Taghavi, B., Hassani, S.M.R., & Hosseini, S.M.J. (2023). Comparison of pseudo-acceleration spectrum obtained from linear interpolation of excitation with pseudo-acceleration spectrum obtained from interpolation with cubic spline function. *Structural and Construction Engineering* (in Persian).

Mahmoudabadi, M., Taghavi, B., Hassani, S.M.R., & Hosseini, S. M. J. (2023). Improvement of the Jennings method using spline interpolation function for numerical calculation of the response coefficient of linear single-degree-of-freedom systems. *Journal of Earthquake Science and Engineering* (Online publication) (in Persian).

Nigam, N.C., & Jennings, P.C. (1968a). Calculation of response spectra from strong-motion earthquake records. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 59(2), 909-922.

Nigam, N.C., & Jennings, P.C. (1968b). Digital calculation of response spectra from strong-motion records. *California Institute of Technology, Earthquake Engineering Research Laboratory*.

Quantitative Evaluation of the Accuracy of the Third-Order Acceleration Method Compared to Other Numerical Methods for a Case Study of a Stiffening Single-Degree-of-Freedom Structure under Harmonic Loading

Masoud Mahmoodabadi^{1*}, Fatemeh Ansari² and Fatemeh Hatfi Ardakani²

1. Assistant Professor, Faculty of Engineering, Qom University, Qom, Iran,
*Corresponding Author, email: m.mahmoudabadi@qom.ac.ir

2. M.Sc. Student of Structures, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran

This paper investigates the displacement response of a nonlinear, stiffening single-degree-of-freedom system subjected to a range of sinusoidal loadings with varying frequencies and force amplitudes. The stiffness variation in this system follows a quadratic relationship with displacement. A total of nine numerical methods were utilized to compute the displacement response of the system. These methods include the third-order acceleration method, the second-order acceleration method, the Newmark's linear acceleration method, the Newmark's average acceleration method, the Wilson-Theta method, the central difference method, the Jennings method, the improved Jennings method, and a newly developed method. Using the developed method and a time step Δt of 0.001 seconds, the system's displacement response was computed and considered as the reference solution. Subsequently, for time steps of 0.001, 0.002, 0.004, 0.006, 0.008, and 0.01 seconds, the displacement response of the system was calculated using the aforementioned nine numerical methods under loading amplitudes of 200, 400, 600, 800, and 1000 Newtons. The root mean square error and the CV of the error for each method were calculated for the defined time steps. Results are presented as bar charts within the paper.

This paper investigates a nonlinear stiffening SDOF system without damping, with a mass of 1000 kg and an initial stiffness of 100,000 N/m. The mass and stiffness specifications of this system were taken from Chang (2009, pp. 289-297), where a two-degree-of-freedom shear system without damping is presented with a mass of 1000 kg for each floor.

In this study, the displacement response of the system under consideration, calculated with a time step of 0.001 seconds, is regarded as the accurate response of the system. To justify this, the studied nonlinear stiffening SDOF system was subjected to a range of sinusoidal loads with frequencies ranging from 1 Hz to 30 Hz, increasing by 0.1 Hz (291 frequencies), with a loading amplitude of 1000 Newtons (the maximum loading amplitude), and the system response was calculated with a maximum time step of 0.01 seconds. Then, using three methods (the innovative method, Newmark's average acceleration method, and the Jennings method) and with a time step of 0.001 seconds, the system's response was calculated and considered as the exact response. By reducing the number of points and changing the time interval from 0.001 seconds to 0.01 seconds, the maximum error and average errors of the nine methods discussed in this study were computed. Examining the results reveals that there is essentially no significant difference in the error values obtained by the three mentioned methods, especially for the average error values. However, since the innovative method assumes a constant stiffness value within each time step of 0.001 seconds, this method appears to offer a higher degree of accuracy.

Overall, the newly developed method, the improved Jennings method, and the original Jennings method, respectively, exhibited the lowest error, while the Wilson-Theta method showed the highest error. In terms of the coefficient of variation, Wilson-Theta, Newmark's average acceleration, and the central difference method, respectively, had the lowest coefficients of variation in ascending order, with the improved Jennings method having the highest coefficient of variation.

Keywords: Third-Order Acceleration Method, Numerical Methods in Structural Dynamics, Stiffening Systems, Root Mean Square Error, CV (Coefficient of Variation) of Error.