

چکیده

تعیین مشخصات مودال سازه‌ها نظیر فرکانس‌های طبیعی و نسبت‌های میرایی، از جمله موضوعات پر اهمیت در مهندسی سازه به شمار می‌رود. در این راستا ارائه یک روش آزمایشگاهی کم‌هزینه و پایدار در برابر انواع نویزها همواره حائز اهمیت است. در مقاله حاضر روش جدیدی جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی و نسبت‌های میرایی سازه‌ها با استفاده از تکنیک ریاضی تجزیه متعامد بهینه ارائه شده است. در این روش از پاسخ ارتعاشی سازه به بارهای ضربه‌ای، بدون نیاز به محاسبه اندازه ضربه استفاده می‌شود. یکی از نقاط قوت روش پیشنهادی، تجمع نویز آزمایشگاهی در مودهای بی‌اهمیت بالا می‌باشد. به عبارت دیگر در فرایند محاسبه فرکانس‌های مربوط به چند مود اول، نویز آزمایشگاهی وارد محاسبات نمی‌شود و در مودهای بالاتر که از اهمیت کمتری برخوردارند، تجمع خواهد شد. کارایی روش جدید با استفاده از شبیه‌سازی عددی و نیز صحت‌سنجی آزمایشگاهی مورد ارزیابی قرار گرفت. روش پیشنهادی به دلیل سادگی، کم‌هزینه بودن و عدم نیاز به تجهیزات پیشرفته آزمایشگاهی می‌تواند به‌عنوان ابزاری مفید جهت تعیین اطلاعات مودال یک سازه و همچنین کنترل نتایج به‌دست آمده از روش‌های آزمایشگاهی دیگر به کار رود.

واژگان کلیدی: فرکانس طبیعی، نسبت میرایی، تجزیه متعامد بهینه، بار ضربه‌ای، آزمایش دینامیکی.

استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه جهت استخراج اطلاعات مودال سازه‌ها تحت اثر بارهای ضربه‌ای

امیر زایری بغلانی نژاد

دانشجوی دکتری سازه، گروه سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

موسی محمودی صاحبی (نویسنده مسئول)

دانشیار، گروه سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران، m.mahmoudi@sru.ac.ir

۱- مقدمه

تغییرات دمایی و یا انواع نویزها، همگی از جمله عوامل مؤثر بر دقت و امکان انجام روش‌های آزمایشگاهی شناسایی اطلاعات مودال سازه‌ها هستند. با توجه به اهمیت موضوع، در دو دهه اخیر تلاش‌های فراوانی در جهت بهبود و ارتقاء این روش‌ها انجام شده است. در این راستا محققین از تکنیک‌های ریاضی مختلفی نظیر روش تفاضلات محدود [۳]، تبدیلات موجک [۴-۵]، تبدیل هیلبرت [۶]، آنالیز بیزین [۷-۸] و موارد دیگر بهره‌جسته‌اند. مرور کاملی از آخرین پیشرفت‌های حاصل شده در زمینه آنالیز مودال در مراجع [۹-۱۱] ارائه شده است. محققین در مرجع [۱۰] مزایا و معایب روش‌های موجود را مورد بررسی و مقایسه قرار داده و چند تکنیک ریاضی جدید در علم پردازش سیگنال که دارای ظرفیت پژوهشی بوده و قابل استفاده در مبحث شناسایی اطلاعات مودال می‌باشد، را معرفی نمودند.

شناسایی اطلاعات مودال سازه‌ها از موضوعات پر اهمیت در علوم نظیر مهندسی هوافضا، مهندسی مکانیک و مهندسی سازه می‌باشد. منظور از شناسایی اطلاعات مودال سازه، تعیین پارامترهایی نظیر فرکانس‌های طبیعی و نسبت‌های میرایی است. در عمل به دلیل عدم اطلاع از مقادیر دقیق ماتریس‌های جرم و سختی، از روش‌های آزمایشگاهی جهت تعیین اطلاعات مودال استفاده می‌شود. عموماً روش‌های آزمایشگاهی مذکور، مبتنی بر پاسخ ارتعاش دینامیکی سازه‌ها هستند [۱]. روش‌های مختلفی توسط محققین جهت استخراج اطلاعات مودال یک سازه از پاسخ دینامیکی آن ابداع شده است. هر یک از این روش‌ها دارای مزایا و معایبی نسبت به یکدیگر می‌باشند [۲]. مسائلی نظیر هزینه‌های آزمایشگاهی، نیاز به اطلاع از اندازه بارهای وارد بر سازه، وجود مودهای خیلی نزدیک به هم، اثرات محیطی نظیر

کمی برخوردار است.

- نیازی به اطلاع از اندازه بار وارده نیست.
- با تعداد اندکی حس گر و تکرار آزمایش می توان فرکانس ها و نسبت های میرایی را محاسبه نمود.
- تنها یک یا چند بار ضربه ای جهت تحریک سازه کافی است و نیازی به تجهیزات خاص جهت اعمال نیروها با فرکانس های مختلف نمی باشد. این موضوع به شدت باعث کاهش هزینه های آزمایشگاهی خواهد شد.
- جهت بررسی کارایی روش پیشنهادی از چند مثال عددی و یک مدل آزمایشگاهی مقیاس شده استفاده خواهد شد. در بخش های بعدی مقاله ابتدا به شرح تئوری روش تجزیه متعامد بهینه پرداخته می شود. پس از آن روش پیشنهادی تشریح می گردد و در انتها، صحت سنجی عددی و آزمایشگاهی روش جدید ارائه خواهد شد.

۲- روش تجزیه متعامد بهینه

روش تجزیه متعامد بهینه و یا به اختصار روش POD یکی از تکنیک های ریاضی کاهش ابعادی داده ها می باشد. در واقع به کمک این روش می توان تخمینی با ابعاد کم برای داده های یک مسئله با ابعاد بزرگ ایجاد کرد. مرور پژوهش های گذشته نشان می دهد که محققین، روش POD را با فرمول بندی های متفاوتی در علوم مختلف به کار برده اند. در برخی مراجع از این روش تحت عناوینی نظیر روش PCA^۲، روش KLD^۴ و روش SVD^۵ نیز نام برده شده است. لیانگ و همکاران [۱۸] در سال ۲۰۰۲ نشان دادند که فرمول بندی همه روش های مذکور معادل هم بوده و بنابراین می توان از همه آنها تحت عنوان روش POD نام برد. لاملی [۱۹] بر اساس مرور برخی منابع، ابداع روش تجزیه متعامد بهینه را به طور مستقل به محققین مختلفی نظیر کوزامبی [۲۰]، کارهونن [۲۱]، لاو [۲۲]، پوگاچف [۲۳] و آبوخوف [۲۴] نسبت می دهد. سیروویچ [۲۵] در راستای توسعه تحقیقات لاملی، نسخه گسسته^۶ روش POD را جهت کاربرد در زمینه دینامیک سیالات معرفی نمود. روش مذکور برای اولین بار در سال ۱۹۹۳

یکی از روش های قدرتمند پردازش داده های به دست آمده از آزمایش، روش تجزیه متعامد بهینه (POD)^۱ می باشد [۱۲]. اصول ریاضی این روش در بخش بعدی مقاله به تفصیل ارائه خواهد شد. در دو دهه اخیر تلاش هایی توسط برخی از محققین در جهت استفاده از روش POD برای تحلیل دینامیکی و آنالیز مودال سازه ها انجام شده است. فنی و لیانگ [۱۳] و همچنین هان و فنی [۱۴] یک روش تحلیلی جهت استخراج شکل مودهای طبیعی سازه با استفاده از روش مذکور ارائه کردند. روش پیشنهادی این محققین دارای محدودیت هایی نظیر نیاز به اطلاع از مقدار دقیق ماتریس جرم سازه بود. آلیسون با استفاده از ترکیب تکنیک ریاضی POD و مفهوم فضای حالت^۲، یک مدل ریاضی جهت پیش بینی پاسخ سیستم های دینامیکی به شرایط اولیه جدید ارائه نمود [۱۵]. کالینیکایدو و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۱۳، روش POD را جهت پردازش پاسخ های ارتعاشی جمع آوری شده در طولانی مدت مربوط به پل وینسنت توماس در کالیفرنیا به کار بردند. این محققین از مقادیر و بردارهای ویژه به دست آمده از روش POD جهت پایش سلامت پل بهره جستند. ناپولیتانو [۱۷] در سال ۲۰۱۶ روشی جهت استخراج توابع پاسخ فرکانسی سازه با استفاده از تکنیک تجزیه متعامد بهینه ارائه نمود.

با وجود پتانسیل های روش POD، تحقیقات اندکی در زمینه استفاده از این روش در مبحث شناسایی مودال سازه ها انجام شده است. در این مقاله روشی جدید جهت تعیین فرکانس های طبیعی و میرایی های مودال سازه با استفاده از نسخه گسسته تکنیک تجزیه متعامد بهینه ارائه خواهد شد. در روش مذکور پاسخ ارتعاش آزاد سازه نسبت به یک ضربه نامعلوم با استفاده از تکنیک POD به چندین پاسخ تجزیه می گردد. سپس با تبدیل فوریه سریع هریک از پاسخ های تجزیه شده، فرکانس های طبیعی سازه استخراج می گردد. پس از آن با استفاده از نمودارهای به دست آمده و به کمک روش پهنای نوار نیم توان، میرایی های مودال سیستم قابل محاسبه خواهند بود. مزایای روش پیشنهادی به شرح زیر می باشد:

- روش پیشنهادی نسبت به نویز آزمایشگاهی از حساسیت بسیار

بدیهی است که برای کاهش ابعاد داده‌های این مسئله از سه به دو بعد، می‌توان از بعد سوم یعنی راستای P3 صرف نظر نمود و با تقریب خیلی خوبی، داده‌ها را فقط بر حسب ترکیب خطی از بردارهای پایه P1 و P2 توصیف نمود.

به منظور استفاده از روش POD در شناسایی اطلاعات مودال سازه‌ها بایستی معادله دینامیکی حرکت توسط این روش کاهش داده شود. بنابراین در ادامه به تشریح اصول ریاضی روند کاهش محاسبات تحلیل دینامیکی سازه با استفاده از این روش پرداخته می‌شود. معادله حرکت حاکم بر رفتار دینامیکی یک سازه به شکل زیر می‌باشد:

$$M\ddot{D}(t) + C\dot{D}(t) + KD(t) = F(t) \quad (1)$$

در این رابطه M ، C و K به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی سازه، $\dot{D}(t)$ ، $\ddot{D}(t)$ و $D(t)$ بردارهای شتاب، سرعت و جابه‌جایی درجات آزادی سازه و $F(t)$ نیز بردار بار وارده می‌باشد.

در صورتی که مجموعه‌ای از داده‌های آزمایشگاهی یا عددی برای این سازه به صورت پاسخ جابه‌جایی (و یا سرعت یا شتاب) موجود باشد، با استفاده از روش POD می‌توان بردارهای پایه متعامدی جهت کاهش ابعاد (درجات آزادی) مسئله به دست آورد. در مسائل دینامیک سازه‌ها به این بردارهای پایه اصطلاحاً مودهای متعامد بهینه^۱ و یا به اختصار **pom** گفته می‌شود [۲۷]. برای محاسبه شکل مودهای **pom** ابتدا بایستی ماتریس کوواریانس داده‌های آزمایشگاهی به شرح زیر تعیین گردد.

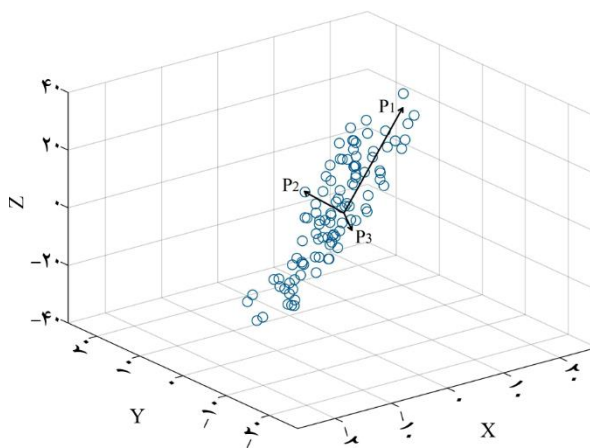
فرض شود که مقادیر جابه‌جایی مربوط به N درجه آزادی از سازه در آزمایشگاه (و یا با مدل‌سازی عددی) در لحظه t به صورت $d_1(t)$ ، $d_2(t)$ ، ... و $d_N(t)$ به دست آمده باشند. اگر مقادیر مذکور برای M لحظه زمانی ذخیره شوند، در این صورت برای درجه آزادی i ام، بردار تاریخچه زمانی جابه‌جایی d_i را می‌توان به صورت رابطه (۲) نمایش داد:

$$d_i = [d_i(t_1), d_i(t_2), \dots, d_i(t_M)]^T \quad (2)$$

می‌توان اطلاعات آزمایشگاهی فوق را برای تمام گره‌ها در یک ماتریس به شکل رابطه (۳) ذخیره نمود.

توسط فیتزسایمونز و روی [۲۶] در زمینه دینامیک سازه‌ها به کار گرفته شد. این محققین از تکنیک مذکور برای کاهش مدل دینامیکی^۷ سازه‌ها بهره جستند.

ایده اصلی روش POD این است که در آن با یک تبدیل متعامد^۸، متغیرهای همبسته مسئله با ابعاد بزرگ به متغیرهای غیر همبسته با ابعاد کوچک تبدیل می‌شود. اگر مجموعه بزرگی از داده‌های چند بعدی حاصل از آزمایش و یا مدل‌سازی عددی در دسترس باشد، برای انجام چنین تبدیلی ابتدا ماتریس کوواریانس داده‌ها محاسبه می‌شود و سپس بردارهای ویژه ماتریس مذکور تعیین می‌گردند. بردارهای ویژه ماتریس کوواریانس داده‌ها، بردارهای پایه^۹ نیز نامیده می‌شوند. در مرحله بعد داده‌های مسئله به صورت ترکیب خطی از این پایه‌های متعامد نوشته می‌شوند. ثابت می‌شود که چند بردار پایه نخست به دست آمده از روش POD، حاوی بیشترین اطلاعات از داده‌ها هستند. بنابراین برای کاهش ابعاد داده‌های مسئله، می‌توان بطور تقریبی آنها را بر اساس ترکیب خطی چند بردار پایه اول نوشت. از نظر هندسی می‌توان جهت بردارهای ویژه ماتریس کوواریانس را جهاتی با بیشترین پراکندگی داده‌ها در نظر گرفت. شکل (۱) راستای سه بردار پایه بهینه را برای مجموعه‌ای از داده‌های سه بعدی نمایش می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود داده‌ها در راستای بردار پایه اول، دارای بیشترین پراکندگی (واریانس) و به ترتیب در راستای بردارهای پایه دوم و سوم از پراکندگی کمتری برخوردار هستند.



شکل (۱): راستای بردارهای ویژه ماتریس کوواریانس مجموعه‌ای از داده‌های سه بعدی.

در رابطه (۷)، \mathbf{pom} یک بردار مقدار ویژه ماتریس کورایانس \mathbf{R} و λ مقدار ویژه متناظر با آن می‌باشد. از آنجایی که ماتریس کورایانس \mathbf{R} از مرتبه $M \times N$ می‌باشد، از حل معادله (۷) تعداد N بردار ویژه \mathbf{pom} و متناظر با آن تعداد N مقدار ویژه λ به دست می‌آید.

همانطور که پیشتر ذکر شد، پایه‌های متعامد به دست آمده از روش POD در یک مسئله دینامیک سازه، شکل موده‌های بهینه آن سازه نامیده می‌شوند. می‌توان تمام بردار شکل موده‌های به دست آمده را به صورت ماتریس شکل مود بهینه \mathbf{POM} ، به صورت رابطه (۸) نوشت:

$$\mathbf{POM} = [\mathbf{pom}_1, \mathbf{pom}_2, \dots, \mathbf{pom}_N] \quad (8)$$

در این صورت می‌توان پاسخ‌های ارتعاشی سازه را به صورت ترکیب خطی از شکل موده‌های مذکور از رابطه زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{D}}(t) &= \mathbf{POM} \ddot{\boldsymbol{\alpha}}(t) \\ \dot{\mathbf{D}}(t) &= \mathbf{POM} \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) \\ \mathbf{D}(t) &= \mathbf{POM} \boldsymbol{\alpha}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

در رابطه فوق $\boldsymbol{\alpha}$ بردار ضرایبی است که بعد زمان را وارد محاسبات می‌نماید.

چند مود اول \mathbf{POM} در برگیرنده‌ی بیشترین اطلاعات دینامیکی سازه می‌باشند [۲۷]. بنابراین به جای استفاده از همه شکل مودها می‌توان بطور تقریبی، تنها از چند مود اول برای تخمین پاسخ‌های ارتعاشی سازه و در نتیجه کاهش ابعاد مسئله بهره جست. در صورتی که تنها از P مود اول استفاده شود ($P < N$) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{D}}(t) &\approx \mathbf{POM}_p \ddot{\boldsymbol{\alpha}}(t) \\ \dot{\mathbf{D}}(t) &\approx \mathbf{POM}_p \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) \\ \mathbf{D}(t) &\approx \mathbf{POM}_p \boldsymbol{\alpha}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

با جایگذاری روابط (۱۰) در رابطه (۱) می‌توان نوشت:

$$\mathbf{MPOM}_p \ddot{\boldsymbol{\alpha}}(t) + \mathbf{CPOM}_p \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) + \mathbf{KPOM}_p \boldsymbol{\alpha}(t) \equiv \mathbf{F}(t) \quad (11)$$

پس از ضرب طرفین معادله اخیر در \mathbf{POM}_p^T :

$$\begin{aligned} \mathbf{POM}_p^T \mathbf{MPOM}_p \ddot{\boldsymbol{\alpha}}(t) + \mathbf{POM}_p^T \mathbf{CPOM}_p \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) + \\ \mathbf{POM}_p^T \mathbf{KPOM}_p \boldsymbol{\alpha}(t) \equiv \mathbf{POM}_p^T \mathbf{F}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1(t_1) & d_2(t_1) & \dots & d_N(t_1) \\ d_1(t_2) & d_2(t_2) & \dots & d_N(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1(t_M) & d_2(t_M) & \dots & d_N(t_M) \end{bmatrix}_{M \times N} \quad (3)$$

ماتریس \mathbf{A} را معمولاً ماتریس اسنپ‌شات^{۱۱} می‌نامند [۲۷]. این نامگذاری به این دلیل انجام شده که هر سطر ماتریس نشان‌دهنده‌ی موقعیت مکانی (یا سرعت و یا شتاب) تمام گره‌های سازه در یک لحظه مشخص می‌باشد گویا در آن لحظه، یک عکاس تصویر سازه را ضبط و در سطر مربوطه ذخیره کرده است. بنابراین در ماتریس اسنپ‌شات، هر سطر نشان‌دهنده‌ی وضعیت کل سازه در یک لحظه مشخص، و هر ستون از ماتریس اسنپ‌شات نشان‌دهنده‌ی بردار تاریخچه زمانی جابه‌جایی (یا سرعت و یا شتاب) گره i ام یعنی \mathbf{d}_i می‌باشد. به منظور تشکیل ماتریس کوواریانس داده‌ها، مؤلفه‌های بردار \mathbf{d}_i برای هر گره، بایستی با تفاضل از میانگین تاریخچه پاسخ همان گره نرمال‌سازی گردد. برای این منظور می‌توان برای هر گره بردار تاریخچه زمانی نرمال شده \mathbf{a}_i را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{d}_i - \bar{d}_i \mathbf{1} \quad (4)$$

در رابطه اخیر \bar{d}_i میانگین مؤلفه‌های بردار \mathbf{d}_i (میانگین اعداد موجود در ستون i ام ماتریس \mathbf{A}) و $\mathbf{1}$ ماتریسی $M \times 1$ با مؤلفه‌های برابر با یک می‌باشد.

بنابراین ماتریس اسنپ‌شات \mathbf{A} را می‌توان به صورت رابطه (۵) بازنویسی نمود:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N]_{M \times N} \quad (5)$$

در این صورت ماتریس کوواریانس \mathbf{R} از رابطه (۶) به دست خواهد آمد [۲۷]:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \quad (6)$$

در این رابطه، \mathbf{R} از مرتبه $M \times N$ بوده و یک ماتریس حقیقی و متقارن است و بردارهای ویژه آن، پایه‌های متعامد در روش POD خواهند بود [۲۷]. برای به دست آوردن پایه‌های متعامد مذکور بایستی معادله مقدار ویژه رابطه (۷) حل شود:

$$\mathbf{R} \mathbf{pom} = \lambda \mathbf{pom} \quad (7)$$

یک درجه آزادی به دست خواهد آمد. فرض شود برای تشکیل مدل یک درجه آزادی کاهش یافته سازه، از شکل مود بهینه i ام یعنی pom_i استفاده شود. در این صورت نیاز است که در مرحله اول ماتریس شکل مود POM (معادله ۸) که تنها شامل بردار شکل مود بهینه i ام است، به صورت رابطه (۱۶) تشکیل گردد:

$$\text{POM} = [\text{pom}_i]_{L \times 1} \quad (16)$$

با جایگذاری رابطه (۱۶) در معادلات (۱۳) به سادگی می‌توان مقادیر جرم m_i ، میرایی c_i و سختی k_i مربوطه و در نتیجه مدل یک درجه آزادی کاهش یافته متناظر با بردار شکل مود بهینه pom_i را به دست آورد:

$$m_i \ddot{\alpha}_i(t) + c_i \dot{\alpha}_i(t) + k_i \alpha_i(t) = 0 \quad (17)$$

معادله یک درجه آزادی (۱۷) اساس کار الگوریتم پیشنهادی را تشکیل می‌دهد. در صورتی که رابطه مذکور بر اساس شکل مود بهینه اول سازه، یعنی pom_1 به دست آمده باشد، پاسخ‌های این معادله حاوی مهم‌ترین اطلاعات دینامیکی سازه از جمله اولین فرکانس طبیعی (f_1) و نسبت میرایی اول (ξ_1) خواهند بود. در واقع فرکانس طبیعی اول سازه بیشترین سهم را در تشکیل هر یک از سیگنال‌های یک بعدی α_1 ، $\dot{\alpha}_1$ و $\ddot{\alpha}_1$ دارد لذا در صورت محاسبه تبدیل سریع فوریه (FFT)^{۱۲} هر یک از سیگنال‌های مذکور، طیف حاصل تنها دارای یک قله با دامنه بسیار بزرگ در محل فرکانس f_1 خواهد بود. از طرف دیگر جهت تعیین نسبت میرایی ξ_1 ، می‌توان به دو طریق عمل نمود. روش اول استفاده از طیف فرکانس به دست آمده و روش پهنای نوار نیم‌توان^{۱۳} است. همچنین به عنوان روش دوم می‌توان از هر یک از پاسخ‌های جابه‌جایی، سرعت و یا شتاب مربوط به معادله (۱۷) و روش تنزل لگاریتمی^{۱۴} بهره جست. جزئیات هر یک از روش‌های پهنای نوار نیم‌توان و تنزل لگاریتمی را می‌توان در مراجع دینامیک سازه نظیر مرجع [۲۸] یافت. با استدلالی مشابه می‌توان مدل یک درجه آزادی کاهش یافته سازه را با استفاده از شکل مود بهینه i ام یعنی pom_i تشکیل داد و در نتیجه فرکانس طبیعی و نسبت میرایی مربوط به مود i ام سازه را به کمک آن محاسبه نمود.

در این مرحله ماتریس‌ها و بردارهای کاهش یافته سازه به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} M_p &= \text{POM}_p^T M \text{POM}_p \\ C_p &= \text{POM}_p^T C \text{POM}_p \\ K_p &= \text{POM}_p^T K \text{POM}_p \\ F_p(t) &= \text{POM}_p^T F(t) \end{aligned} \quad (13)$$

بنابراین شکل نهایی کاهش یافته معادله دینامیکی حرکت سازه به صورت رابطه (۱۴) خواهد بود:

$$M_p \ddot{\alpha}(t) + C_p \dot{\alpha}(t) + K_p \alpha(t) = F_p(t) \quad (14)$$

در صورتی که درجه آزادی مربوط به معادله (۱) از مرتبه N باشد، درجه آزادی معادله کاهش یافته رابطه (۱۴) از مرتبه P خواهد بود. در این مقاله از مدل دینامیکی کاهش یافته (رابطه ۱۴) جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی و میرایی‌های سازه استفاده می‌شود.

۳- استخراج اطلاعات مودال سازه‌ها به کمک روش POD

در این بخش به تشریح الگوریتم پیشنهادی تعیین فرکانس‌های طبیعی و نسبت‌های میرایی سازه با استفاده از روش POD پرداخته می‌شود. فرض شود که سازه مورد مطالعه تحت اثر یک بار ضربه‌ای قرار گرفته و بعد از زوال پاسخ گذرا، تاریخچه زمانی مربوط به پاسخ‌های پایدار در L درجه آزادی از سازه اندازه‌گیری شده است. با توجه به توضیحات بخش قبل می‌توان ماتریس اسنپ‌شات پاسخ‌ها را تشکیل داده، سپس ماتریس کوواریانس مربوطه را محاسبه نمود. در مرحله بعد با حل معادله مقدار ویژه (رابطه ۷)، شکل مودهای بهینه سازه (pom ها) تعیین می‌گردند. در نتیجه مدل دینامیکی کاهش یافته سازه مورد مطالعه با استفاده از شکل مودهای مذکور به صورت رابطه (۱۵) به دست می‌آید:

$$M_L \ddot{\alpha}(t) + C_L \dot{\alpha}(t) + K_L \alpha(t) = 0 \quad (15)$$

اندیس L در معادله فوق بدین معناست که ماتریس‌های کاهش یافته جرم و میرایی و سختی از مرتبه $L \times L$ می‌باشند. بدیهی است در صورتی که تنها از یک شکل مود بهینه pom برای تشکیل معادله (۱۵) استفاده شود، مدل کاهش یافته سازه با

- $(\dot{\alpha}_i)$ با استفاده از روابط (۲۱) یا (۲۲)
 ۴- محاسبه تبدیل سریع فوری $\ddot{\alpha}_i$ (یا α_i یا $\dot{\alpha}_i$) جهت تعیین فرکانس طبیعی f_i
 ۵- تعیین میرایی ξ_i با استفاده از طیف به دست آمده از مرحله ۴ به روش پهنای نوار نیم توان و یا با استفاده از پاسخ $\ddot{\alpha}_i$ (α_i یا $\dot{\alpha}_i$) به روش تنزل لگاریتمی
 ۶- تکرار مراحل ۳ تا ۵ به ازای $i = 1, 2, 3, \dots, N$ برای تعیین N فرکانس طبیعی و نسبت میرایی سازه
 در ادامه مقاله به ارزیابی عملکرد الگوریتم پیشنهادی با استفاده از مدل‌های عددی و آزمایشگاهی پرداخته می‌شود.

۴- صحت‌سنجی عددی

در این تحقیق جهت بررسی و ارزیابی صحت و دقت عملکرد الگوریتم پیشنهادی، از چهار مدل عددی استفاده شد. مدل‌های مذکور به ترتیب یک تیر دو سر ساده، یک قاب پورتال دو بعدی، یک خرپای سه بعدی و یک تیر دو سر گیردار می‌باشند. پاسخ دینامیکی هر یک از مدل‌ها تحت اثر بار ضربه‌ای، توسط نرم افزار SAP2000 محاسبه گردید. مشخصات مکانیکی مصالح به کار رفته مطابق با جدول (۱) می‌باشد. پس از آن با استفاده از برنامه کامپیوتری تهیه شده با نرم افزار MATLAB، ماتریس شکل مودهای POM، فرکانس‌های طبیعی و نسبت‌های میرایی مدل‌ها محاسبه شدند. در ادامه به شرح این مثالها پرداخته می‌شود.

جدول (۱): مشخصات مکانیکی مصالح به کار رفته در مدل‌های عددی.

مدول الاستیسیته E	2.04×10^6 کیلوگرم بر سانتی متر مربع
نسبت پواسون ν	۰/۳
چگالی ρ	۷۸۴۹ کیلوگرم بر مترمکعب

۴-۱- مثال اول: تیر دو سر ساده

در این مثال یک تیر دو سر ساده تحت اثر بار ضربه‌ای به عنوان اولین مدل عددی جهت صحت‌سنجی عملکرد الگوریتم پیشنهادی در نظر گرفته شد. شکل (۲) مشخصات هندسی تیر و بار ضربه‌ای وارد بر آن را نشان می‌دهد.

در مسائل واقعی ماتریس‌های جرم و سختی سازه‌ها به‌طور دقیق معلوم نیست. بنابراین استفاده از الگوریتم پیشنهادی به شکل تشریح شده در فوق امکان‌پذیر نمی‌باشد. به عبارت دیگر در صورتی که مقادیر c_i و m_i مشخص نباشد، پاسخ‌های α_i ، $\dot{\alpha}_i$ و $\ddot{\alpha}_i$ را نمی‌توان به‌طور مستقیم از حل معادله (۱۷) به دست آورد. راه حل استفاده از داده‌های آزمایشگاهی برای تعیین پاسخ‌های مذکور می‌باشد. فرض شود که پاسخ شتاب مربوط به N گره از سازه به کمک حس‌گرهای شتاب‌سنج در آزمایشگاه و در M لحظه زمانی اندازه‌گیری شده است:

$$\ddot{\mathbf{D}}_{N \times M} = [\ddot{d}_1, \ddot{d}_2, \ddot{d}_3, \dots, \ddot{d}_N]^T \quad (18)$$

بنابراین تعداد N بردار شکل مود بهینه سازه را می‌توان محاسبه نمود. در صورتی که $\ddot{\alpha}_i$ پاسخ شتاب مدل یک درجه آزادی کاهش یافته به دست آمده از بردار \mathbf{pom}_i باشد، می‌توان نوشت:

$$[\ddot{\mathbf{D}}(t)]_{N \times M} = [\mathbf{pom}_i]_{N \times 1} \cdot [\ddot{\alpha}_i(t)]_{1 \times M} \quad (19)$$

از طرفی

$$\mathbf{pom}_i^T \cdot \mathbf{pom}_i = 1 \quad (20)$$

بنابراین از ضرب طرفین معادله (۱۹) در \mathbf{pom}_i^T بردار $\ddot{\alpha}_i$ به‌سادگی به دست می‌آید:

$$\ddot{\alpha}_i(t) = \mathbf{pom}_i^T \cdot \ddot{\mathbf{D}}(t) \quad (21)$$

در صورتی که به‌جای پاسخ شتاب سازه، تاریخچه زمانی سرعت یا جابه‌جایی در دسترس باشد، به‌طور مشابه می‌توان پاسخ‌های α_i و $\dot{\alpha}_i$ را از روابط زیر تعیین نمود:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_i(t) &= \mathbf{pom}_i^T \cdot \dot{\mathbf{D}}(t) \\ \alpha_i(t) &= \mathbf{pom}_i^T \cdot \mathbf{D}(t) \end{aligned} \quad (22)$$

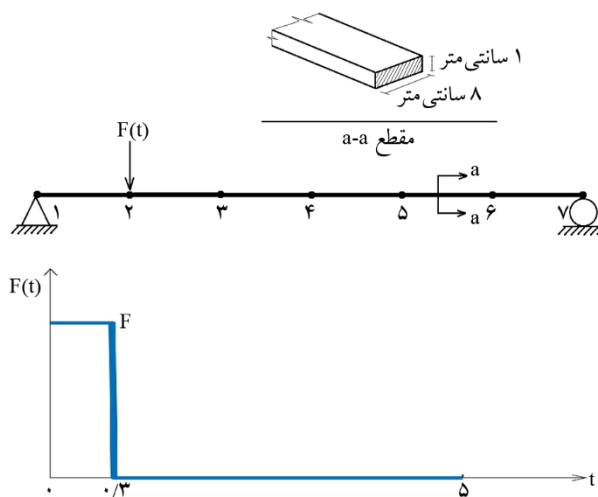
الگوریتم پیشنهادی در مقاله حاضر را می‌توان به شرح زیر خلاصه نمود:

۱- اندازه‌گیری پاسخ شتاب (سرعت یا جابه‌جایی) سازه در N گره و M لحظه زمانی و مرتب‌سازی داده‌ها در یک ماتریس (رابطه ۱۸)

۲- محاسبه N شکل مد بهینه سازه با استفاده از رابطه‌های (۲) تا (۸)

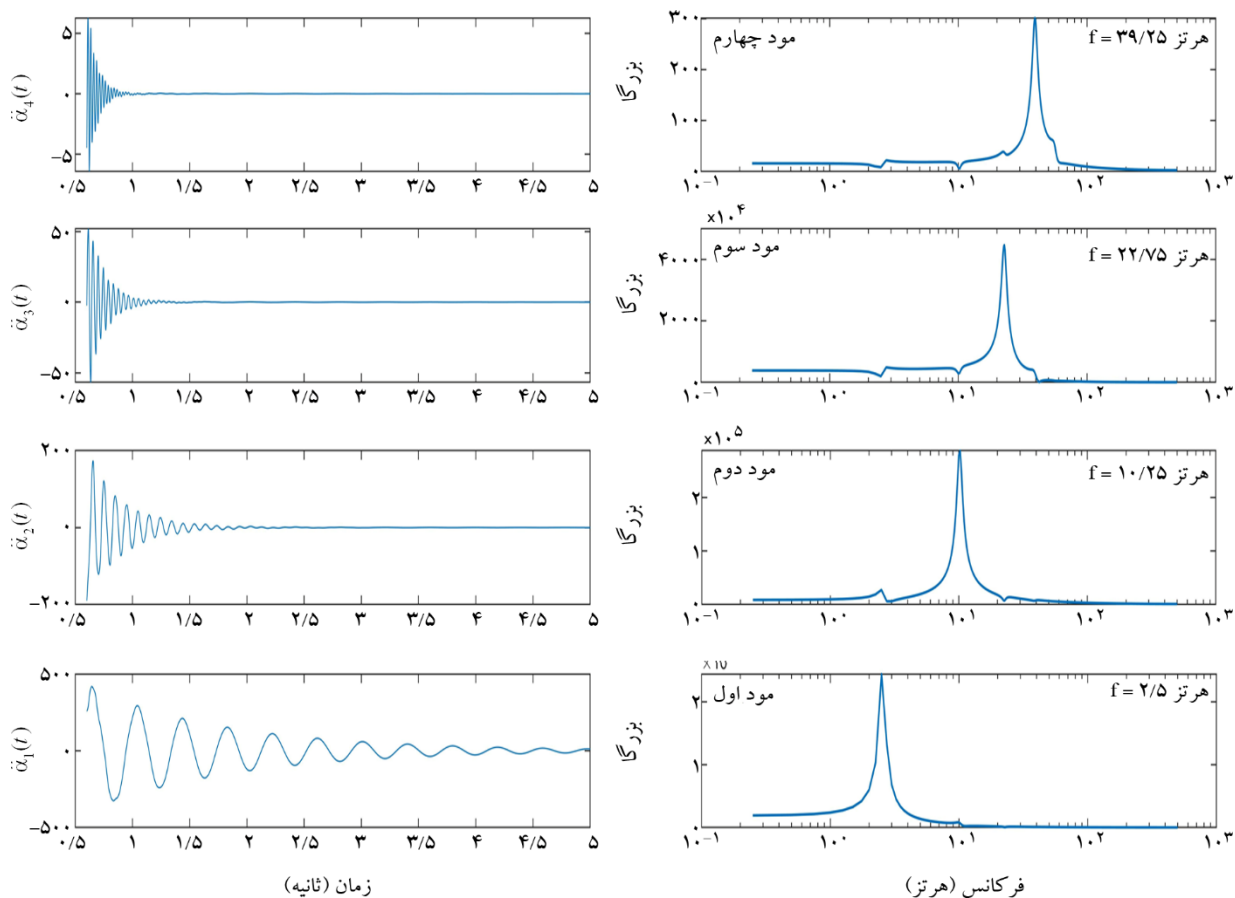
۳- تعیین پاسخ مدل یک درجه آزادی کاهش یافته $\ddot{\alpha}_i$ (α_i یا $\dot{\alpha}_i$)

مدت زمان ۵ ثانیه بعد از اعمال بار محاسبه شد. مقدار گام زمانی Δt برابر با $0/01$ ثانیه در آنالیز منظور شد. در تمام مطالعات انجام شده برای این مثال، نسبت میرایی تیر ثابت و برابر با ۵ درصد در نظر گرفته شد. به منظور بررسی جنبه‌های مختلف کارایی روش پیشنهادی، سه مطالعه در مورد مثال اول انجام شد که در ادامه به شرح نتایج به دست آمده از این مطالعات پرداخته می‌شود. در مطالعه اول مقدار بار ضربه‌ای برابر با $F = 50$ نیوتن در گره شماره ۲ نظر گرفته شد. فرض گردید که چهار حسگر شتاب‌سنج در گره‌های ۳ تا ۶ نصب شده‌اند. بنابراین برای تعیین اطلاعات مودال تیر، از پاسخ شتاب به دست آمده در گره‌های مذکور استفاده شد. برای اطمینان از حذف پاسخ گذرای ناشی از ضربه، داده‌های ثبت شده از لحظه اعمال ضربه تا زمان $0/6$ ثانیه از رکوردهای شتاب حذف شد. شکل (۳) نمودار پاسخ‌های شتاب مربوط به مدل‌های یک درجه آزادی کاهش یافته تیر و نمودارهای طیف متناظر با آنها را به ازای مودهای بهینه اول تا چهارم نشان می‌دهد.



شکل (۲): مشخصات هندسی تیر مثال اول و بار ضربه‌ای وارد بر آن.

مدل اجزای محدود مذکور شامل شش المان خمشی با طول‌های مساوی ۲۵ سانتی‌متر می‌باشد. به هر یک از گره‌ها دو درجه آزادی به ترتیب جابه‌جایی عمود بر محور تیر و دوران در صفحه اختصاص داده شد. ارتعاش تیر تحت اثر ضربه وارده تا



شکل (۳): نتایج به دست آمده در مطالعه اول مربوط به مثال تیر دو سر ساده.

مورد انتظار در شتاب‌سنج‌ها حداکثر در حدود نیم درصد g می‌باشد [۲۹]. بنابراین دامنه‌های نویز در نظر گرفته شده در این مطالعه نزدیک به مقادیر واقعی در نظر گرفته شده است. شکل (۴) نمودارهای طیف به دست آمده برای تیر مورد مطالعه را به‌ازای دامنه‌های مختلف نویز آزمایشگاهی نشان می‌دهد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، محتوای فرکانسی مربوط به نویز آزمایشگاهی، در آخرین مود ظاهر می‌شود. این موضوع به دلیل ماهیت روش تجزیه متعامد بهینه است. به عبارت دیگر نویز آزمایشگاهی از دامنه بسیار کمتری نسبت به پاسخ دینامیکی سازه برخوردار بوده و از آنجایی که در روش POD اطلاعات کم‌اهمیت‌تر در آخرین شکل مودهای بهینه ظاهر می‌شوند، بنابراین نویز آزمایشگاهی در روش پیشنهادی تنها مودهای آخر را تحت تأثیر قرار خواهد داد. این خاصیت یکی از نقاط قوت الگوریتم پیشنهادی به شمار می‌رود.

جدول (۳) خطای محاسبه فرکانس‌های میرای طبیعی به دست آمده در مطالعه دوم را به‌ازای دامنه‌های مختلفی از نویز آزمایشگاهی با یکدیگر مقایسه می‌کند. بررسی خطاها در این جدول نشان می‌دهد که دقت نتایج در فرکانس مود چهارم با افزایش دامنه نویز کاهش می‌یابد. این در حالی است که وجود نویز آزمایشگاهی بر دقت نتایج مودهای کوچکتر که از اهمیت بیشتری برخوردارند، تأثیری ندارد.

کاهش هزینه‌ها یکی از موضوعات پراهمیت در روش‌های آزمایشگاهی است. در مبحث شناسایی پارامترهای دینامیکی سازه‌ها، استفاده از روش‌هایی که به تعداد حس‌گر کمتری نیاز دارند علاوه بر کاهش هزینه، محدودیت‌های انجام آزمایش را نیز کمتر می‌کند.

جدول (۳): خطای محاسبه فرکانس‌های طبیعی مثال اول به‌ازای دامنه‌های مختلف نویز.

درصد خطای روش پیشنهادی به‌ازای دامنه‌های مختلف نویز			فرکانس طبیعی به روش FEM	
نویز ۵ درصد	نویز ۱ درصد	نویز صفر درصد		
۱/۵۷	۱/۵۷	۱/۵۷	۲/۵۴	f_1
۰/۹۸	۰/۹۸	۰/۹۸	۱۰/۱۶	f_2
۰/۸۴	۰/۲۶	۰/۲۶	۲۲/۷۲	f_3
-	۲/۰۱	۰/۱۰	۳۹/۳۴	f_4

همانطور که ملاحظه می‌شود هر یک از نمودارهای طیف به دست آمده از تبدیل فوریه تاریخچه‌های شتاب، تنها دارای یک قله برجسته می‌باشد که نشان‌دهنده فرکانس‌های طبیعی تیر است. لازم به ذکر است که اعداد نشان داده شده در شکل، فرکانس‌های میرای تیر هستند و برای به دست آوردن فرکانس‌های نامیرا بایستی این اعداد بر عبارت $\sqrt{1-\xi_i^2}$ تقسیم شوند.

به منظور ارزیابی دقت نتایج، فرکانس‌های طبیعی میرای به دست آمده از روش پیشنهادی با مقادیر تئوریک به دست آمده از روش اجزای محدود در جدول (۲) با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود بیشترین خطا برای چهار مود اول تیر، حدود ۱/۵ درصد می‌باشد که نشان‌دهنده دقت مناسب نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی است.

جدول (۲): مقایسه فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از روش پیشنهادی و روش اجزای محدود.

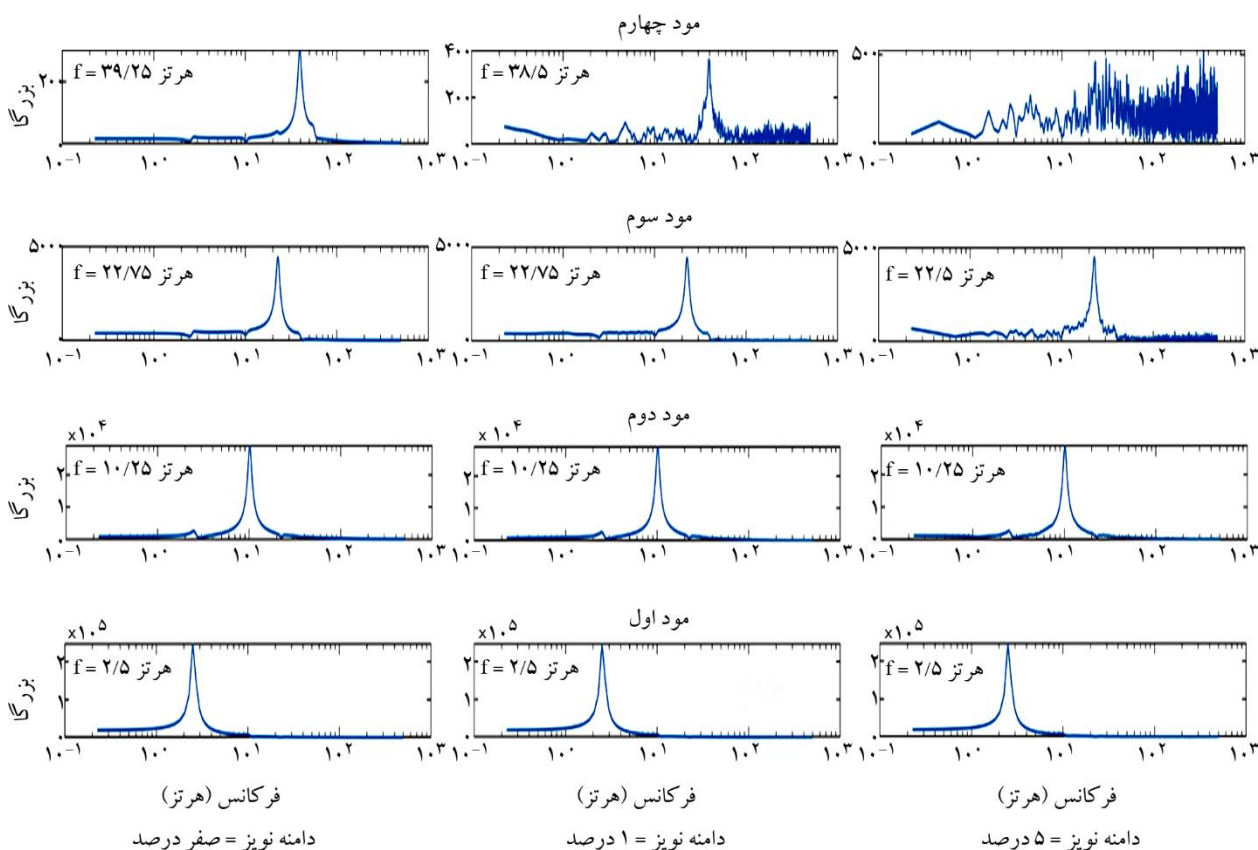
شماره مود	فرکانس‌ها به روش پیشنهادی	فرکانس‌ها به روش FEM	درصد خطا
f_1	۲/۵۰	۲/۵۴	۱/۵۷
f_2	۱۰/۲۶	۱۰/۱۶	۰/۹۸
f_3	۲۲/۷۸	۲۲/۷۲	۰/۲۶
f_4	۳۹/۳۰	۳۹/۳۴	۰/۱۰

داده‌های به دست آمده از آزمایش‌های دینامیکی همواره آغشته به نویز هستند، بنابراین در مطالعه دوم مربوط به مثال تیر دو سر ساده، اثر نویز آزمایشگاهی بر دقت نتایج روش پیشنهادی بررسی شد. برای این منظور پاسخ‌های شتاب به دست آمده از تیر با استفاده از رابطه زیر به نویز سفید گوسی آلوده گردید و نتایج با حالت بدون نویز مقایسه شد.

$$\ddot{d}_{\text{noisy}} = \ddot{d}_{\text{exact}} + \sigma \cdot \text{randn}(1, M) \cdot \ddot{d}_{\text{exact}} \quad (23)$$

در این رابطه \ddot{d} بردار رکورد شتاب مربوط به یک گره از تیر با بعد $1 \times M$ و $\text{randn}(1, M)$ یک بردار اعداد تصادفی با توزیع گاوسی، میانگین صفر و انحراف از معیار σ می‌باشد.

در رابطه اخیر σ دامنه نویز نامیده می‌شود که مقدار آن در این مطالعه ۱ و ۵ درصد در نظر گرفته شد. معمولاً در عمل دامنه نویز



شکل (۴): مقایسه نمودارهای طیف تیر دو سر ساده به‌آزای مقادیر مختلفی از دامنه نویز.

الگوریتم پیشنهادی، با حداقل تعداد حس‌گر می‌توان نتایج رضایت‌بخشی را به دست آورد.

جدول (۴): مقدار بار ضربه‌ای و محل نصب حس‌گرها در آزمایش‌های مختلف (مطالعه سوم مربوط به مثال تیر دو سر ساده).

شماره آزمایش	محل نصب حس‌گر (شماره گره)	مقدار بار ضربه‌ای F (بر حسب N)
۱	۳	۵۰
۲	۴	۶۳
۳	۵	۵۵
۴	۶	۴۸

جدول (۵): نتایج به‌دست آمده از مطالعه سوم مربوط به مثال تیر دو سر ساده.

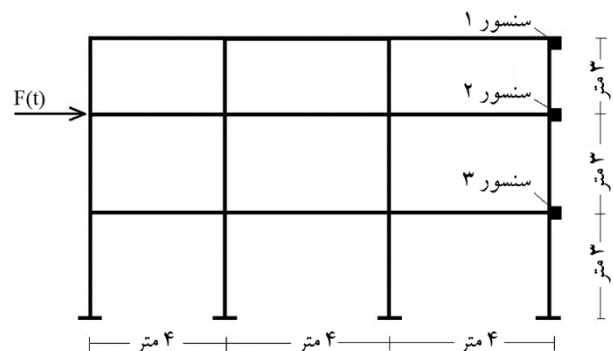
فرکانس طبیعی	روش POD	روش FEM	درصد خطا
f_1	۲/۵۰	۲/۵۴	۱/۵۷
f_2	۱۰/۲۶	۱۰/۱۶	۰/۹۸
f_3	۲۲/۷۸	۲۲/۷۲	۰/۲۶
f_4	۳۹/۳۰	۳۹/۳۴	۰/۱۰

در مطالعه سوم اثر تعداد حس‌گر بر دقت و کارایی روش پیشنهادی مورد مطالعه قرار گرفت. بدین منظور فرض شد که تنها یک حس‌گر در دسترس بوده و با تکرار آزمایش ضربه در گره شماره ۲؛ پاسخ‌های شتاب در گره‌های ۳ تا ۶ اندازه‌گیری می‌شود. در صورت عدم استفاده از تجهیزات پیشرفته، مقدار ضربه در آزمایش‌های مختلف کاملاً یکسان نیستند. بنابراین به منظور شبیه‌سازی شرایط واقعی آزمایش، فرض شد که مقدار ضربه نیز در آزمایش‌های مختلف متغیر است. جدول (۴) مقادیر بار ضربه‌ای F را در آزمایش‌های مختلف نشان می‌دهد. دامنه نویز آزمایشگاهی در تمام موارد برابر با ۲ درصد در نظر گرفته شد.

جدول (۵) نتایج به دست آمده از مطالعه سوم مربوط به تیر دو سر ساده را برای دو روش POD و FEM با یکدیگر مقایسه می‌کند. حداکثر خطا در این حالت نیز برابر با ۱/۵۷ درصد می‌باشد و بنابراین نتایج این بخش نشان می‌دهد که در استفاده از

۴-۲- مثال دوم: قاب پورتال دو بعدی

در این مثال یک قاب پورتال سه طبقه و سه دهانه جهت صحت‌سنجی روش پیشنهادی در نظر گرفته شد. مشخصات هندسی قاب، محل اعمال ضربه و همچنین محل نصب حس گرها در شکل (۵) نشان داده شده است. مقدار بار ضربه وارد بر سازه در این مثال $F = 100$ کیلوگرم و بزرگی دامنه نویز برابر با ۲ درصد فرض شد. سطح مقطع ستون‌ها و تیرها در مدل‌سازی به ترتیب IPB 220 و IPE 18 اختیار شد. سایر فرضیات مدل‌سازی، مشابه مثال قبل می‌باشد. در این مثال، دو حالت میرایی جهت مدل‌سازی قاب در نظر گرفته شد. در حالت اول نسبت میرایی در تمام مودها ثابت و در حالت دوم این مقدار متغیر در نظر گرفته شد. پس از انجام تحلیل و تعیین شکل مودهای بهینه POM، مقادیر فرکانس‌های طبیعی و همچنین نسبت‌های میرایی مودال با استفاده از دو روش پهنای نوار نیم توان و تنزل لگاریتمی تعیین گردید.



شکل (۵): مشخصات قاب پورتال مثال دوم.

جدول‌های (۶) و (۷) نتایج به دست آمده برای دو حالت را نشان می‌دهند. اعداد درون پرانتز مقادیر درصد خطا می‌باشند. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود در این مثال نیز انطباق خوبی بین فرکانس‌های به دست آمده از روش POD و FEM مشاهده می‌شود. در خصوص برآورد نسبت‌های میرایی، بررسی اعداد در جدول نشان می‌دهد که دقت نتایج به دست آمده از روش تنزل لگاریتمی، با بالا رفتن شماره مدها کاهش می‌یابد. این در حالی است که نتایج به دست آمده به کمک روش پهنای نوار نیم توان، برای مود اول دارای خطای بزرگی بوده و با افزایش شماره مدها این خطا سیر نزولی را طی می‌نماید. نتایج مشابهی در خصوص تعیین میرایی سازه‌های مختلف با استفاده از روش POD به دست آمد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در استفاده از الگوریتم پیشنهادی، به کارگیری روش تنزل لگاریتمی برای تعیین نسبت میرایی مود اول و روش پهنای نوار نیم توان برای نسبت‌های میرایی مودهای بالاتر، مناسب‌ترین نتایج را به دست می‌دهد.

۴-۳- مثال سوم: خرابی سه بعدی

جهت ارزیابی توانایی روش پیشنهادی در تعیین فرکانس‌ها و نسبت‌های میرایی سازه‌های سه بعدی، در این بخش یک خرابی سه بعدی مطابق با شکل (۶) در نظر گرفته شد. جهت مدل‌سازی خرابی در این مثال، نسبت میرایی ثابت و برابر ۲ درصد و دامنه نویز آزمایشگاهی برابر با ۱ درصد لحاظ شد.

جدول (۶): اطلاعات مودال قاب مثال ۲ در حالت نسبت‌های میرایی ثابت.

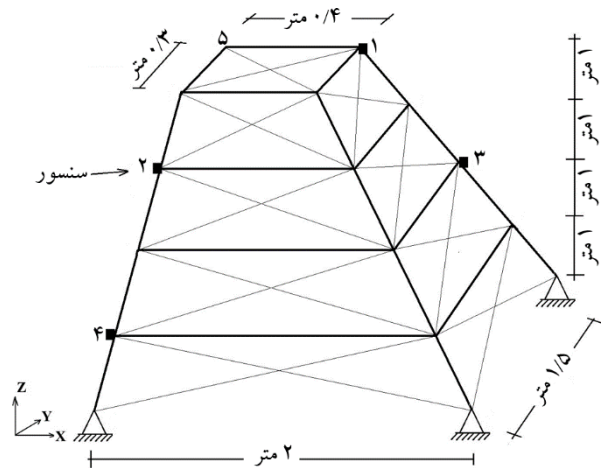
شماره مود	نسبت میرایی	فرکانس به روش FEM	فرکانس به روش POD	نسبت میرایی (نیم توان)	نسبت میرایی (تنزل لگاریتمی)
۱	$\xi_1 = 0.02$	$f_1 = 5/38$	$5/41$ (٪۰/۶۲)	0.0213 (٪۰/۶۵)	0.0206 (٪۰/۳)
۲	$\xi_2 = 0.02$	$f_2 = 19/49$	$19/45$ (٪۰/۲۱)	0.0211 (٪۰/۵۵)	0.017 (٪۰/۱۵)
۳	$\xi_3 = 0.02$	$f_3 = 38/81$	$38/90$ (٪۰/۲۲)	0.0201 (٪۰/۵)	0.017 (٪۰/۱۵)

جدول (۷): اطلاعات مودال قاب مثال ۲ در حالت نسبت‌های میرایی متغیر.

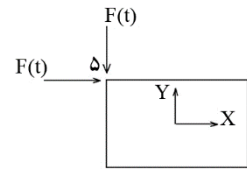
شماره مود	نسبت میرایی	فرکانس به روش FEM	فرکانس به روش POD	نسبت میرایی (نیم توان)	نسبت میرایی (تنزل لگاریتمی)
۱	$\xi_1 = 0.035$	$f_1 = 5/38$	$5/29$ (٪۰/۶۷)	0.0357 (٪۰/۲)	0.0352 (٪۰/۵۷)
۲	$\xi_2 = 0.03$	$f_2 = 19/49$	$19/54$ (٪۰/۲۶)	0.0305 (٪۰/۶۷)	0.0288 (٪۰/۴)
۳	$\xi_3 = 0.025$	$f_3 = 38/81$	$39/31$ (٪۰/۲۹)	0.0246 (٪۰/۱۶)	0.0230 (٪۰/۸)

داده‌های به دست آمده از دو آزمایش در یک ماتریس تجمیع و ماتریس‌های کوواریانس و شکل مودهای بهینه POM محاسبه شد. در انتها فرکانس‌های طبیعی و نسبت‌های میرایی مربوط به پنج مود اول خرپا مطابق با اعداد جدول (۸) به دست آمد.

لازم به ذکر است که در این مثال نسبت میرایی مربوط به مود اول، با استفاده از روش تنزل لگاریتمی و برای سایر مودها با استفاده از روش پهنای نوار نیم‌توان محاسبه شد. همانطور که ملاحظه می‌شود، حداکثر خطا برای فرکانس‌های طبیعی در مود پیچشی و برابر با ۰/۲۲ درصد ظاهر شده است. همچنین حداکثر خطا برای نسبت‌های میرایی، مربوط به مودهای سوم و چهارم بوده که برابر با ۱۰ درصد است. نتایج این مثال نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی و نسبت‌های میرایی سازه‌های سه‌بعدی از دقت و کارایی قابل قبولی برخوردار می‌باشد.



مشخصات هندسی مقاطع	
L 40x4	اعضای قطری افقی
L 60x6	اعضای قطری قائم
L 100x10	اعضای اصلی افقی و قائم



شکل (۶): مشخصات خرپای سه‌بعدی مثال سوم.

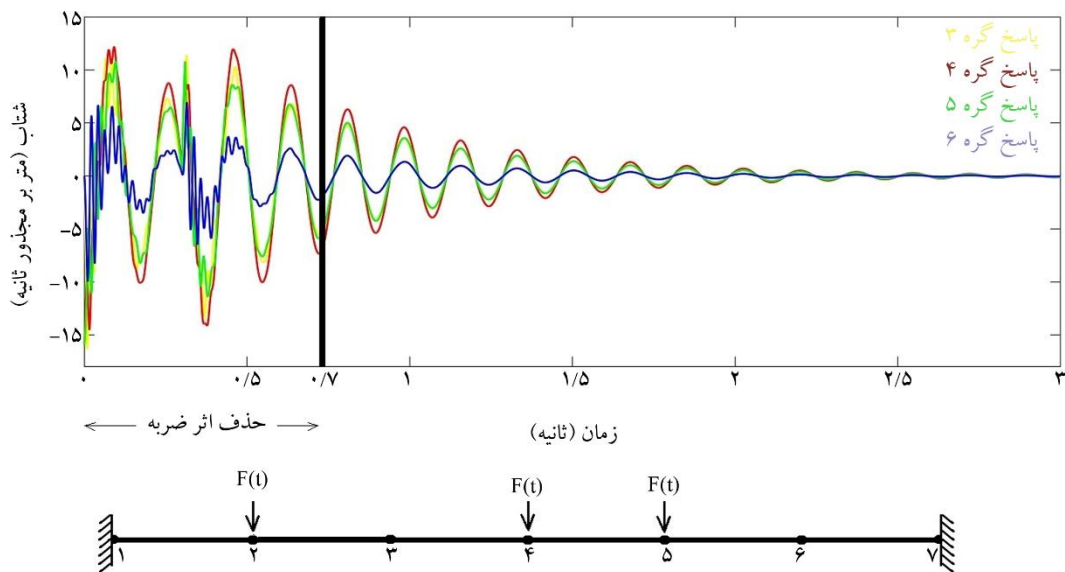
۴-۴- مثال چهارم: بررسی اثر بارهای ضربه‌ای چندگانه

در این مثال به بررسی کارایی الگوریتم پیشنهادی تحت شرایط بارهای ضربه‌ای چندگانه پرداخته شد. به این منظور تیر مثال اول به صورت دو سر گیردار و تحت اثر سه بار ضربه‌ای توأم مورد مطالعه قرار گرفت. به جز شرایط مرزی، تمام خصوصیات هندسی و مکانیکی و سایر فرضیات مسئله مشابه با مثال اول در نظر گرفته شد. شکل (۷) جزئیات بارگذاری و پاسخ‌های شتاب به کار رفته در محاسبه فرکانس‌های تیر را نشان می‌دهد. برای محاسبه چهار فرکانس اول، ابتدا به کمک مدل‌سازی اجزای محدود شتاب تیر در چهار گره (۳ تا ۶) اندازه‌گیری گردید.

سایر فرضیات مدل‌سازی مشابه با مثال ۲ می‌باشد. پنج مود نوسانی اول این خرپا شامل چهار مود حرکت جانبی (مودهای اول، دوم، چهارم و پنجم) و یک مود حرکت پیچشی (مود سوم) است. در این مثال هدف تعیین اطلاعات مودال مربوط به پنج مود اول خرپا می‌باشد، بنابراین به منظور تحریک مودهای طبیعی آن، دو بار ضربه‌ای در دو آزمایش جداگانه به گره ۵ وارد گردید. ابتدا یک بار ضربه‌ای معادل $F = 100$ کیلوگرم در جهت X به سازه وارد شد و مقادیر شتاب در همین راستا در گره‌های ۱ تا ۴ اندازه‌گیری شد. در آزمایش دوم بار ضربه‌ای دیگری معادل با $F = 85$ کیلوگرم به گره ۵ و در جهت Y به سازه اعمال شد و سپس مجدداً مقادیر شتاب در گره‌های ۱ تا ۴ در راستای Y محاسبه شد. پس از آن

جدول (۸): اطلاعات مودال خرپای سه‌بعدی مثال سوم.

جهت مود نوسانی	نسبت میرایی دقیق	فرکانس به روش FEM	فرکانس به روش POD	نسبت‌های میرایی به دست آمده از الگوریتم
حرکت جانبی در جهت Y	$\xi_1 = 0/02$	$f_1 = 54/79$	$54/81 (0/06)$	$0/199 (0/11)$
حرکت جانبی در جهت X	$\xi_2 = 0/02$	$f_2 = 69/26$	$69/21 (0/05)$	$0/201 (0/05)$
حرکت پیچشی	$\xi_3 = 0/02$	$f_3 = 103/03$	$102/78 (0/22)$	$0/18 (0/10)$
حرکت جانبی در جهت Y	$\xi_4 = 0/02$	$f_4 = 125/18$	$125 (0/12)$	$0/18 (0/10)$
حرکت جانبی در جهت X	$\xi_5 = 0/02$	$f_5 = 132/21$	$132/2 (0/01)$	$0/209 (0/4/5)$



شکل (۷): تیر طره‌ای مثال چهارم تحت اثر سه بار ضربه‌ای توأم.

جدول (۹): خطای روش پیشنهادی در حالت اعمال بار ضربه‌ای چندگانه به‌ازای دامنه‌های مختلف نویز (مثال چهارم).

درصد خطای روش پیشنهادی به‌ازای دامنه‌های مختلف نویز			فرکانس طبیعی به روش FEM	
نویز ۵ درصد	نویز ۲ درصد	بدون نویز		
۵/۷۸ (%/۳۵)	۵/۷۸ (%/۳۵)	۵/۷۸ (%/۳۵)	۵/۷۶	f_1
۱۵/۹۹ (%/۱۰۷)	۱۵/۷۸ (%/۲۵)	۱۵/۷۸ (%/۲۵)	۱۵/۸۲	f_2
-	۳۰/۵۲ (%/۳۹)	۳۰/۴۴ (%/۱۳)	۳۰/۴۰	f_3
-	-	۴۷/۱۱ (%/۲۱)	۴۷/۰۱	f_4

حاضر نشان‌دهنده‌ی موفقیت روش پیشنهادی در تعیین فرکانس‌های سازه تحت اثر بارهای ضربه‌ای توأم می‌باشد. همانطور که در بخش‌های پیشین نیز اشاره شد، به منظور تعیین فرکانس‌های مودهای بالاتر نیاز است که شتاب مربوط به گره‌های بیشتری از تیر وارد محاسبات شوند.

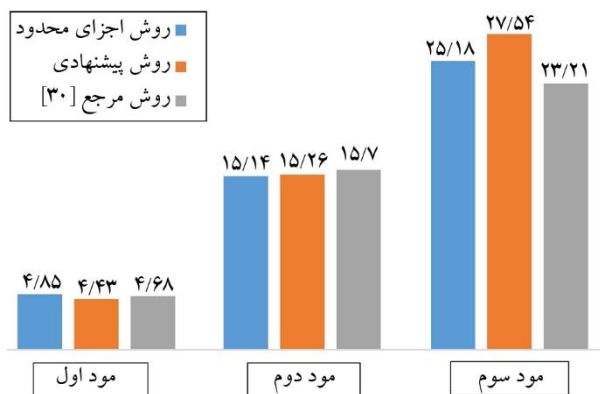
۵- ارزیابی آزمایشگاهی

در این تحقیق به منظور بررسی بیشتر کارایی روش پیشنهادی، از یک مدل آزمایشگاهی با مقیاس کوچک استفاده گردید که توسط حواریان و محمودی [۳۰] ساخته شده و اطلاعات مودال آن با استفاده از روش پردازش تصویر بسته^{۱۵} توسط محققین مذکور محاسبه شده است. مدل مذکور یک قاب پورتال دو بعدی سه طبقه با یک دهانه می‌باشد. شکل (۸) نمایی از این مدل آزمایشگاهی، خصوصیات هندسی آن و سایر تجهیزات آزمایشگاهی مورد استفاده را نشان می‌دهد.

طول رکوردهای شتاب اندازه‌گیری شده، ۵ ثانیه در نظر گرفته شد. به منظور خارج نمودن اثر پاسخ گذرای ضربه از محاسبات داده‌های مربوط به ۰/۷ ثانیه ابتدایی، مطابق با شکل (۷) از رکوردهای شتاب حذف شد. همچنین به منظور شبیه‌سازی شرایط نویزی، پاسخ‌های به دست آمده توسط رابطه (۲۳) به نویز با دامنه ۲ و ۵ درصد آلوده شد. جدول (۹) مقادیر فرکانس‌های به دست آمده از این مطالعه و همچنین درصد خطای آن را نسبت به پاسخ‌های دقیق روش اجزای محدود به‌ازای دامنه‌های مختلف نویز نشان می‌دهد.

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود درصد خطای روش در این مطالعه کمتر از ۱ درصد می‌باشد. با افزایش دامنه نویز تا ۵ درصد، فرکانس‌های مود سوم و چهارم قابل محاسبه نیست. این موضوع به دلیل انباشت اثر نویز در شکل مودهای بهینه سوم و چهارم می‌باشد. با این وجود دو فرکانس اول و دوم تیر به‌ازای دامنه‌های مختلف نویزی با دقت بسیار بالایی به دست آمده‌اند. نتایج مثال

نمودار میله‌ای شکل (۱۱) مقایسه نتایج به دست آمده از سه روش را نشان می‌دهد. بر اساس انتظار، هیچ کدام از فرکانس‌های به دست آمده از دو روش آزمایشگاهی، کاملاً منطبق بر نتایج اجزای محدود نبوده و قدری با آن اختلاف دارند. همانطور که پیشتر ذکر شد، این اختلاف به دلیل خطاهای مدل‌سازی روش اجزای محدود می‌باشد. از طرف دیگر فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از روش پیشنهادی و روش مرجع [۳۰]، برای دو مود اول بسیار به هم نزدیک است اما در مورد مود سوم این اختلاف در حدود ۱۸ درصد می‌باشد. علت این موضوع را می‌توان به ویژگی الگوریتم پیشنهادی در انتقال اثر نویز به مود آخر مرتبط دانست. به بیان ساده‌تر همانطور که قبلاً نیز ذکر شد، در روش POD اطلاعات مربوط به نویز آزمایشگاهی معمولاً آخرین مود را تحت تأثیر قرار می‌دهند. بنابراین برای اندازه‌گیری مود سوم با دقت بالاتر بایستی حداقل رکورد شتاب مربوط به چهار گره از سازه در محاسبات مورد استفاده قرار گیرد. نتایج به دست آمده از این مطالعه آزمایشگاهی، کارایی و قابلیت روش پیشنهادی را در تعیین اطلاعات مودال سازه‌ها با استفاده از داده‌های آغشته به نویز، به خوبی نشان می‌دهد.



شکل (۱۱): مقایسه فرکانس‌های طبیعی مدل آزمایشگاهی به دست آمده از سه روش.

۶- خلاصه و جمع‌بندی

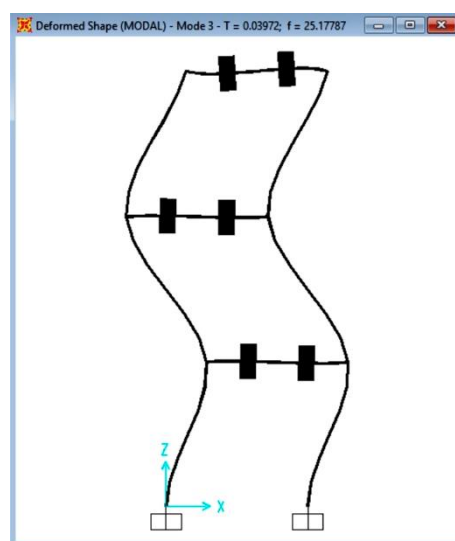
در این مقاله یک روش جدید جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی و نسبت‌های میرایی سازه‌های الاستیک خطی مبتنی بر آزمایش بار ضربه‌ای معرفی گردید. در این راستا از تکنیک ریاضی تجزیه

در جدول (۱۰) فرکانس طبیعی و نسبت‌های میرایی مربوط به سه مود اول قاب به دست آمده از روش جدید نشان داده شده است. نسبت میرایی مربوط به مود اول با استفاده از روش تنزل لگاریتمی و سایر نسبت‌های میرایی به روش پهنای نوار نیم‌توان محاسبه شده‌اند.

جدول (۱۰): اطلاعات مودال مربوط به قاب مدل آزمایشگاهی با استفاده از روش پیشنهادی.

شماره مود	فرکانس‌های طبیعی (هرتز)	نسبت میرایی (درصد)
۱	$f_1 = 4/43$	$\xi_1 = 0/3$
۲	$f_2 = 15/26$	$\xi_2 = 0/2$
۳	$f_3 = 27/54$	$\xi_3 = 0/07$

جهت اطمینان از صحت نتایج به دست آمده، قاب مورد مطالعه به کمک نرم‌افزار SAP2000 مدل‌سازی و فرکانس‌های طبیعی آن با استفاده از روش اجزای محدود محاسبه شد. شکل (۱۰) مدل مذکور را نشان می‌دهد. معمولاً بین مدل اجزای محدود و سازه واقعی تفاوت‌هایی از قبیل شکل هندسی سازه و مشخصات مکانیکی مصالح و غیره وجود دارد. بنابراین پاسخ‌های به دست آمده از روش جدید علاوه بر نتایج مدل اجزای محدود، با فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده از روش پردازش تصویر مرجع [۳۰] نیز مقایسه شدند.



شکل (۱۰): مدل اجزای محدود قاب مورد مطالعه در آزمایشگاه.

پیشنهادی جهت استخراج اطلاعات مودال سازه‌ها از ارتعاش محیطی آنها در شرایط نویزی شدید با استفاده از ترکیب روش تجزیه متعامد بهینه و تکنیک ریاضی کاهش تصادفی^{۱۶} می‌باشند.

مراجع

1. Ewins, D.J. (2000) *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. Research Studies Press LTD, Baldock, Hertfordshire, England.
2. Ewins, D.J. (2000) Basics and state-of-the-art of modal testing. *Sadhana*, **25**(3), 207-220.
3. Yin, H.P. and Duhamel, D. (2000) Finite difference formulation for modal parameter estimation. *Journal of sound and vibration*, **231**(2), 259-275.
4. Lardies, J. and Gouttebroze, S. (2002) Identification of modal parameters using the wavelet transform. *International Journal of Mechanical Sciences*, **44**(11), 2263-2283.
5. Le, T.P. and Argoul, P. (2004) Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response. *Journal of Sound and Vibration*, **277**(1-2), 73-100.
6. Yang, K., Yu, K., and Li, Q. (2013) Modal parameter extraction based on Hilbert transform and complex independent component analysis with reference. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **40**(1), 257-268.
7. Yan, W.J. and Katafygiotis, L.S. (2015) A two-stage fast Bayesian spectral density approach for ambient modal analysis. Part I: posterior most probable value and uncertainty. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **54**, 139-155.
8. Yan, W.J. and Katafygiotis, L.S. (2015) A two-stage fast Bayesian spectral density approach for ambient modal analysis. Part II: Mode shape assembly and case studies. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **54**, 156-171.
9. Amezcua-Sanchez, J.P. and Adeli, H. (2016) Signal processing techniques for vibration-based health monitoring of smart structures. *Archives of Computational Methods in Engineering*, **23**(1), 1-15.
10. Perez-Ramirez, C.A., Amezcua-Sanchez, J.P., Adeli, H., Valtierra-Rodriguez, M., Romero-Troncoso, R.D.J., Dominguez-Gonzalez, A., and

متعامد بهینه بهره گرفته شد. علت استفاده از روش مذکور، پتانسیل بالای آن در حذف نویز از داده‌های آزمایشگاهی می‌باشد. در استفاده از الگوریتم پیشنهادی نیازی به دانستن بار وارد بر سازه نمی‌باشد، بنابراین روش جدید در دسته روش‌های خروجی-تنها قرار می‌گیرد. دقت و کارایی روش پیشنهادی، با استفاده از چهار مدل عددی و یک نمونه آزمایشگاهی مورد بررسی قرار گرفت. خلاصه نتایج به دست آمده از این تحقیق را می‌توان به شرح زیر بیان نمود:

۱. تطابق خوبی بین نتایج روش جدید و پاسخ‌های به دست آمده از مدل‌های عددی و آزمایشگاهی مشاهده شد. همچنین در بررسی کارایی روش پیشنهادی برای تعیین اطلاعات مودال سازه‌های تحت اثر بارهای ضربی چندگانه، نتایج رضایت‌بخشی به دست آمد.
۲. بررسی‌ها نشان داد که در استفاده از الگوریتم پیشنهادی، خطاهای ناشی از نویز تنها اطلاعات آخرین مودها را تحت تأثیر قرار می‌دهد. بنابراین روش جدید در شرایط وجود داده‌های آزمایشگاهی نویزی از کارایی بالایی برخوردار می‌باشد.
۳. بر اساس بررسی‌های مختلف، این نتیجه به دست آمد که برای سازه‌های با میرایی کم روش پیشنهادی دارای دقت قابل قبولی می‌باشد و با افزایش میرایی به تدریج از دقت نتایج کاسته می‌گردد. از آنجایی که سازه‌های معمولی دارای میرایی نسبتاً پایینی هستند، لذا الگوریتم پیشنهادی برای تعیین اطلاعات مودال آنها بسیار مناسب است.
۴. جهت به حداقل رساندن خطا در تعیین نسبت‌های میرایی مودال سازه این نتیجه به دست آمد که برای مود اول بایستی از روش تنزل لگاریتمی و برای سایر مودها از روش پهنای نوار نیم‌توان استفاده نمود.
۵. روش آزمایشگاهی پیشنهادی بسیار کم‌هزینه است زیرا در این روش تنها با یک حس‌گر و تکرار آزمایش بار ضربی و بدون نیاز به هیچ تجهیزات خاص دیگری به سادگی می‌توان فرکانس‌های طبیعی و نسبت‌های میرایی سازه را محاسبه نمود. در گام بعدی این پژوهش، محققین در حال توسعه الگوریتم

22. Loeve, M. (1948) Fonctions Aléatoires du Second Ordre. In: *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*, P. Levy (ed.), Gauthier-Villars.

23. Pougachev, V.S. (1953) General theory of the correlations of random functions. *Izvestiya Akademii Nauk USSR*, **17**, 1401-1402.

24. Obukhov, M. A. (1954) Statistical description of continuous fields. *Transactions of the Geophysical International Academy Nauk USSR* **24**, 3-42.

25. Sirovich, L. (1987) Turbulence and the dynamics of coherent structures. II. Symmetries and transformations. *Quarterly of Applied Mathematics*, **45**(3), 573-582.

26. Fitzsimons, P.M. and Rui, C. (1993) Determining low dimensional models of distributed systems. *Advances in Robust and Nonlinear Control Systems*, **53**, 9-15.

27. Eftekhar Azam, S. (2014) *Online Damage Detection in Structural Systems: Applications of Proper Orthogonal Decomposition, and Kalman and Particle Filters*. Springer Science & Business Media.

28. Chopra, A.K. (2016) *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. 5th Ed., Prentice Hall.

29. Ebrahimian, H., Astroza, R., Conte, J.P., and de Callafon, R.A. (2017) Nonlinear finite element model updating for damage identification of civil structures using batch Bayesian estimation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **84**, 194-222.

30. Havarani, A. and Mahmoudi Sahebi, M. (2020) Extracting structural dynamic properties utilizing close photogrammetry method. *Measurement*, **150**, 107092.

واژه‌نامه

1- تجزیه متعامد بهینه
Proper Orthogonal Decomposition (POD)

2- فضای حالت
State Space

3- آنالیز اجزای اصلی
Principal Component Analysis (PCA)

4- تجزیه کارهونن - لائو
Karhunen-Loeve Decomposition (KLD)

5- تجزیه مقادیر تکین
Singular Value Decomposition (SVD)

Osornio-Rios, R.A. (2016) Time-frequency techniques for modal parameters identification of civil structures from acquired dynamic signals. *Journal of Vibroengineering*, **18**(5), 3164-3185.

11. Sirca Jr, G.F. and Adeli, H. (2012) System identification in structural engineering. *Scientia Iranica*, **19**(6), 1355-1364.

12. Rathinam, M. and Petzold, L.R. (2003) A new look at proper orthogonal decomposition. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **41**(5), 1893-1925.

13. Feeny, B.F. and Liang, Y. (2003) Interpreting proper orthogonal modes of randomly excited vibration systems. *Journal of Sound and Vibration*, **265**(5), 953-966.

14. Han, S. and Feeny, B. (2003) Application of proper orthogonal decomposition to structural vibration analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **17**(5), 989-1001.

15. Allison, T.C. (2007) *System Identification via the Proper Orthogonal Decomposition*. Ph.D. Dissertation Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.

16. Kallinikidou, E., Yun, H.B., Masri, S.F., Caffrey, J.P., and Sheng, L.H. (2013) Application of orthogonal decomposition approaches to long-term monitoring of infrastructure systems. *Journal of Engineering Mechanics*, **139**(6), 678-690.

17. Napolitano, K.L. (2016) 'Using singular value decomposition to estimate frequency response functions'. In: *Topics in Modal Analysis & Testing*, **10**, Springer, Cham, 27-43.

18. Liang, Y.C., Lee, H.P., Lim, S.P., Lin, W.Z., Lee, K.H., and Wu, C.G. (2002) Proper orthogonal decomposition and its applications-Part I: Theory. *Journal of Sound and vibration*, **252**(3), 527-544.

19. Lumley, J.L. (1970) *Stochastic Tools in Turbulence*. New York: Academic press.

20. Kosambi, D. (1943) Statistics in function space. *Journal of Indian Mathematical Society*, **7**, 76-88.

21. Karhunen, K. (1946) Uber Lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Annals of Academic Science Fennicae, Series A1 Mathematics and Physics*, **37**, 3-79.

Snapshot Version	۶- نسخه گسسته
Dynamic Model Reduction (DMR)	۷- کاهش مدل دینامیکی
Orthogonal Projection	۸- تبدیل متعامد
Basis Vector	۹- بردارهای پایه
Proper Orthogonal Modes (POM)	۱۰- مودهای متعامد بهینه
Snapshot Matrix	۱۱- ماتریس اسنپ‌شات
Fast Fourier Transform (FFT)	۱۲- تبدیل سریع فوریه
Half-Power Bandwidth Method	۱۳- روش پهنای نوار نیم توان
Logarithmic Decrement Method	۱۴- روش تنزل لگاریتمی
Close Photogrammetry Method	۱۵- روش پردازش تصویر بسته
Random Decrement	۱۶- کاهش تصادفی

Determination of the Modal Information of Structures under Impact Loads Using Proper Orthogonal Decomposition

Amir Zayeri Baghlani Nejad¹ and Mussa Mahmoudi Sahebi^{2*}

1. Ph.D. Candidate, Department of Civil Engineering, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran
2. Associate Professor, Department of Civil Engineering, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran,
*Corresponding Author, email: m.mahmoudi@sru.ac.ir

Determining the modal characteristics of structures such as natural frequencies and damping ratios is one of the most important issues in structural engineering. In this regard, providing a low-cost and robust experimental method against all types of noises is very important. In the present paper, a new algorithm for determining the natural frequencies and damping ratios of structures under impact loads using the proper orthogonal decomposition technique is presented. This method uses the vibrational response of the structure to impact loads, without the need to calculate the impact magnitude. One of the strength points of the proposed methodology is the accumulation of laboratory noises in the latest modes. In other words, in the process of calculating the frequencies related to the first few modes, laboratory noise does not enter the calculations and will be aggregated in higher modes that are less important. The feasibility and efficiency of the new method was evaluated using numerical simulations as well as laboratory validation. In this research, four pure numerical models were used to evaluate and validate the accuracy of the proposed algorithm. These models include a simply supported beam, a two-dimensional portal frame, a three-dimensional truss and a clamped-clamped beam. The natural frequencies and damping ratios of the mentioned models were calculated using the new method, then the results were compared with those that obtained from the finite element method. Very good agreement was observed between the results of the two methods. For further investigation, various states such as the effect of the noise on the results, the effect of multiple impact loads and the effect of the number of sensors were also studied. The results of these numerical studies showed that the proposed method is very stable and robust against laboratory noises and has small errors. Acceptable results can be obtained in using a few numbers of sensors (even one sensor) and repetition of the test. Also, the results for multiple impact loads are almost similar to the results obtained from the excited state with a simple impulse load. In this study, in order to further investigate the efficiency of the POD based method, a small-scale laboratory model developed at Shahid Rajaei Teacher Training University and whose modal information has already been calculated using the closed image processing method, was studied. Good agreement was observed between the results of the two methods, so it can be another reason for the efficiency and capability of the new method.

Based on various studies, it was concluded that for structures with low damping, the proposed method has acceptable accuracy and with increasing damping, the accuracy of the results gradually decreases. Since conventional structures have a relatively low attenuation, the proposed algorithm is very suitable for determining their modal information. The proposed method due to the availability, cheapness and no need for complex experimental tools can be used as a useful algorithm to determine the modal information of a structure as well as control the results obtained from other experimental methods.

Keywords: Dynamic Experiment, Impulse Load, Modal Information, Proper Orthogonal Decomposition.