

### چکیده

در این مقاله جنبه‌های نظری و محاسباتی تحلیل محیط‌های خاکی غیراشباع در تغییر شکل‌های بزرگ ارائه شده است. خاک غیراشباع به صورت محیطی سه فاز در نظر گرفته شده است. با توجه به این که در حال حاضر کاملاً اثبات شده که برخی از نظریه‌های مورد استفاده در مکانیک خاک کلاسیک در مکانیک خاک غیراشباع کاربرد ندارد، به جای نظریه تنش مؤثر کلاسیک، که در خاک‌های اشباع کاربرد فراوانی دارد، از دو متغیر مستقل تنسوری تنش خالص و مکش به عنوان متغیرهای حالت و نیز سطوح حالت نسبت پوکی و درجه اشباع که تابع این دو متغیر حالت هستند، جهت تبیین رفتار این خاک‌ها استفاده شده است. جریان فازهای سیال بر اساس قانون دارسی بیان شده و نفوذپذیری نسبت به آب و هوا تابعی از نسبت پوکی و درجه اشباع در نظر گرفته شده‌اند. با این فرضیات تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ با استفاده از توصیف لاگرانژی به‌هنگام انجام گرفته و معادلات دیفرانسیل و اجزاء محدود کوبله حاکم بر محیط غیراشباع تحت بارگذاری کلی دینامیکی حاصل شده است. سپس بر اساس نرم‌افزار UDAMN که اصلاح شده نرم‌افزار UDAM بوده و در این تحقیق تهیه شده، مثال‌هایی از کاربرد این تحلیل ارائه شده است.

**کلمات کلیدی:** تغییر شکل‌های بزرگ، خاک غیراشباع، تحلیل دینامیکی، اجزاء محدود، متغیرهای حالت، سطوح حالت

## فرمول‌بندی محیط‌های خاکی غیراشباع در تغییر شکل‌های بزرگ تحت بارگذاری دینامیکی و استاتیکی

مسعود میرمحمدصادقی (نویسنده مسؤل)

استادیار مجتمع عالی آموزشی و پژوهشی صنعت آب و برق اصفهان

E-mail: msadeghi@ieht.ac.ir

بهروز گتمبری

استاد دانشکده فنی دانشگاه تهران

### 1- مقدمه

در مناطق وسیعی از سطح زمین که دارای آب‌وهوای خشک و نیمه‌خشک هستند (مانند کشور ایران) و حتی در مناطقی با آب‌وهوای معتدل و نیمه مرطوب و در کلیه مناطقی که سطح آب زیرزمینی پایین‌تر از سطح طبیعی زمین واقع است، خاک در وضعیت غیراشباع قرار می‌گیرد. به این ترتیب شاید مناسب‌تر باشد که خاک اشباع کامل و خاک خشک را حالات خاصی از خاک غیر اشباع در نظر بگیریم و در این صورت اهمیت بررسی این خاک‌ها بیشتر آشکار می‌شود. امروزه مسلم شده است که تفسیر مشخصات رفتاری خاک‌های غیر اشباع با استفاده از نظریه‌های کلاسیک و قوانین رفتاری که برای خاک‌های اشباع به کار می‌رود به‌طور کامل امکان‌پذیر نیست. از طرف دیگر یکی از مسائل مهم در مکانیک خاک گسیختگی پیشرونده است که آن را می‌توان با تحلیل‌های تغییر

شکل بزرگی به خوبی بیان نمود.

### 2- تعاریف اساسی

یکی از مسائل مهم، کاربرد نظریه تنش مؤثر در مکانیک خاک غیراشباع است. طبق تعریف، تنش مؤثر تابعی است از تنش کل و فشار آب حفره‌ای که اثرات مکانیکی تغییر تنش مثل تغییر حجم و تغییر مقاومت برشی را کنترل می‌کند. تغییر حجم مشخصات مقاومت برشی یک خاک اشباع با تنش مؤثر کنترل می‌شود. درحالی که یافتن متغیرهای حالت تنش برای خاک غیراشباع پیچیده‌تر است. بیشاپ [1] در سال 1959 رابطه (1) را برای تنش مؤثر خاک‌های غیر اشباع بیان نمود:

$$\sigma' = (\sigma - u_a) + x(u_a - u_w) \quad (1)$$

که در آن  $\sigma$  تنش کل،  $u_a$  فشار هوای حفره‌ای،  $u_w$  فشار آب حفره



که در آن  $\alpha, a$  ضرایب ثابت و  $e$  نسبت پوکی می‌باشد. یوشیمی و اوستربرگ در سال 1964 [8] رابطه زیر را برای ضریب نفوذپذیری هوا پیشنهاد نمودند که تابع درجه اشباع و نسبت پوکی می‌باشد:

$$k_a = b \frac{\gamma_a}{\mu_a} [e(1 - s_r)]^\beta \quad (5)$$

که در آن  $b, \beta$  ضرایب ثابت،  $\mu_a$  ویسکوزیته هوا و  $e$  نسبت پوکی می‌باشند. ضریب نفوذپذیری هوا با افزایش نسبت پوکی افزایش یافته و با افزایش درجه اشباع کاهش می‌یابد. در معادله فوق  $b$  دارای بعد  $(L^2)$  و نیز ضریب  $\beta$  بدون بعد می‌باشد.

فردلند و مرگسترن در سال 1977 [9] برای خاک‌های غیراشباع با توجه به طبیعت سه فازه بودن آنها دو تنور تنش مستقل عرضه کردند. تحلیل تنش نشان داد که هر ترکیب دوتایی از سه متغیر مستقل تنش برای توصیف وضعیت تنش خاک غیراشباع قابل استفاده است. تنسورهای مستقل تنش عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - u_a & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - u_a & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - u_a \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} u_a - u_w & 0 & 0 \\ 0 & u_a - u_w & 0 \\ 0 & 0 & u_a - u_w \end{bmatrix}$$

مدل غیرخطی هذلولوی برای رابطه تنش - تغییر شکل نسبی خاک‌ها استفاده شده است [10]. این مدل توسط دانکن در سال 1980 [11] بسط یافته است. البته در مورد خاک‌های غیراشباع، تصحیحات لازم جهت وارد کردن تأثیر مکش، در مدل انجام گرفته است. چنانچه خواهیم دید در روابط تنش - تغییر شکل نسبی این مدل از 6 پارامتر استفاده می‌گردد. این پارامترها عبارتند از زاویه اصطکاک داخلی، چسبندگی و چهار پارامتر دیگر که از همان آزمایش‌های تعیین مقاومت برشی خاک حاصل می‌گردند [11].

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon}{\left[ \frac{1}{E_i} + \frac{\varepsilon \cdot R_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \right]} \quad (6)$$

ای و  $x$  پارامتری است که به درجه اشباع خاک مربوط است. مقدار این پارامتر برای خاک اشباع برابر یک و برای خاک خشک برابر صفر است. پیشاپ و بلایت مشکلات استفاده از یک رابطه یگانه تنش مؤثر را برای رفتار تغییر شکل خاک عنوان نمودند و نتیجه گرفتند که مسیرهای تنش بر حسب تغییر شکل برای هر دو مؤلفه تنش  $x(u_a - u_w)$  و  $(\sigma - u_a)$  باید به صورت مستقل در نظر گرفته شود و تغییرات حجم نیز بر حسب این دو مؤلفه ترسیم گردد [2]. برلاند در سال 1965 نیز مجدداً عنوان نمود تغییرات حجم خاک باید مستقلاً به این دو مؤلفه مربوط باشد [3]. ماتیاس و راداکریشنا در سال 1968 تحقیقات گسترده‌ای را بر روی رفتار خاک‌های غیراشباع انجام دادند [4]. آنها عدم اعتبار رابطه تنش مؤثر پیشاپ را نشان دادند و استفاده از سطوح حالت جهت تعیین رفتار خاک‌های غیراشباع را مطرح نمودند. رابطه‌ی واحدی بین سه کمیت تنش  $(\sigma - u_a)$ ، مکش  $(u_a - u_w)$  و نسبت پوکی  $(e)$  و درجه اشباع  $(S_r)$  وجود دارد که به ترتیب با سطوح همکاران [5] معادله سطح حالت نسبت پوکی را مطابق معادله (2) تعریف نمودند که در این مقاله از آن استفاده شده است:

$$e = \frac{1 + e_0}{\exp \left\{ \frac{\left[ \frac{a(\sigma - u_a)}{u_{atm}} + b \left[ 1 - \frac{(\sigma - u_a)}{\sigma_e} \right] * \frac{(u_a - u_w)}{u_{atm}} \right]^{1-m}}{k_b(1-m)} \right\}^{-1}} \quad (2)$$

معادله سطح حالت درجه‌ی اشباع به صورت زیر است که در

آن  $a, b$  و  $c$  ضرایب ثابت می‌باشند [6].

$$S_r = 1 - [a + b(\sigma - u_a)] [1 - e^{-c(u_a - u_w)}] \quad (3)$$

روابط نفوذپذیری آب توسط فردلند [7] جمع‌آوری شده است. از آن جمله ایرمی و نیز لمب و ویتمن رابطه زیر را برای تعیین ضریب نفوذپذیری آب با در نظر گرفتن درجه اشباع و نسبت پوکی ارائه نمودند:

$$k_w = a10^{\alpha e} \left( \frac{S_r - S_{ru}}{1 - S_{ru}} \right)^3 \quad (4)$$

که در آن:

$$R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \quad (7)$$

که زیرنویس‌های  $f, ult$  به ترتیب نشان‌دهنده وضعیت‌های نهایی و شکست می‌باشند. رابطه بین ضریب مماسی اولیه و فشار محدودکننده به صورت زیر است:

$$E_i = K \cdot P_{atm} \left( \frac{\sigma_3}{P_{atm}} \right)^n \quad (8)$$

با اعمال غیراشباع بودن خاک، ضریب مماسی ارتجاعی

برای بارگذاری عبارت است از:

$$E_t = (E_i + E_s)(1 - R_f S_1) \quad (9)$$

که در آن  $E_s$  ضریب مکش بوده و برابر است با:

$$E_s = m_1 (u_a - u_w) \quad (10)$$

که در آن  $m_1$  ضریب ثابت است. همچنین  $S_1$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$S_1 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \quad (11)$$

ضریب ارتجاعی مماسی برای باربرداری برابر است با:

$$E_t = (E_i + E_s) \quad (12)$$

### 3- معادلات حاکم

جهت به دست آوردن معادلات حاکم بر محیط سه فازی

متخلخل لازم است معادلات آب و هوا و تعادل نوشته شوند [12].

معادله پیوستگی آب به شکل زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial (n s_r \rho_w)}{\partial t} + \text{div}(n s_r \rho_w \mathbf{v}_w) = 0 \quad (13)$$

با توجه به رابطه (14) که سرعت نسبی فاز آب را محاسبه

می‌کند، در آن  $w$  سرعت نسبی آب و  $\mathbf{v}_w$  و  $\mathbf{v}_s$  به ترتیب

سرعت مطلق آب و سرعت اسکلت می‌باشند:

$$w_i = n s_r (\mathbf{v}_w - \mathbf{v}_s) \quad (14)$$

با در نظر گرفتن این نکته که درجه اشباع تابعی از تنش و

مکش در خاک است داریم:

$$s_r = s_r((\sigma - m p_a), (p_a - p_w)) \quad (15)$$

و اعمال قانون دارسی:

$$w = -k_w \left( \frac{\nabla p_w}{\gamma_w} + \nabla z + \frac{\mathbf{a}}{g} \right) \quad (16)$$

معادله دیفرانسیل حاکم به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$s_r \rho_w \frac{\partial n}{\partial t} + n \rho_w \left[ g_1 \frac{\partial (\sigma - m p_a)}{\partial t} + g_2 \frac{\partial (p_a - p_w)}{\partial t} \right] + \text{div}(p_w w) + \text{div}(n s_r p_w \mathbf{v}_w) = 0 \quad (17)$$

شکل انتگرالی (ضعیف) معادله (17) در زمان  $t + dt$  با

ضرب روابط فوق در تابع وزن  $\delta p_w$  و انتگرال‌گیری روی

المان حجم حاصل می‌شود. شایان ذکر است که از معادله

رفتاری (18) نیز در به دست آوردن شکل انتگرالی معادلات

فوق که از رفتار خاک‌های غیراشباع ناشی می‌شود، استفاده

شده است [13]:

$$d(\sigma - m p_a) = D d\varepsilon - DD_s^{-1} d(p_a - p_w) \quad (18)$$

جهت کاربرد نظریه تغییر شکل‌های بزرگ با فرمولاسیون

لاگرانژین به‌هنگام (UL) رابطه (18) به شکل رابطه (18) مورد

استفاده قرار گرفته است [14]:

$$d(\sigma^J - m p_a) = D d\varepsilon + DD_s^{-1} d(p_a - p_w) \quad (19)$$

بنابراین شکل کلی معادلات اجزاء محدود برای معادله

پیوستگی آب به صورت زیر خواهد بود:

$$S_{WW} dP_W + S_{Wa} dP_W + T_{WW} \mathbf{v}_w^{t+dt} + T_{Wa} \mathbf{v}_w^{t+dt} + H_W \mathbf{v}_w^{t+dt} + G_W \mathbf{v}_w^{t+dt} = R_w^{t+dt} + f_w^t \quad (20)$$

پارامترهای رابطه (20) در روابط (21) تا (26) آمده است:

$$S_{WW} = \int_{W^t} (\nabla N_w)^T \frac{\rho_w k_w}{\gamma_w} (\nabla N_w) dW^t \quad (21)$$

$$T_{Wa} = \int_{W^t} N_w^T n \rho_w (-g_1 DD_s^{-1} + g_2) N_a dW^t \quad (22)$$

$$H_W = \int_{W^t} N_w^T \rho_w (s_r (1+n) m^T + g_1 n D) B dW^t \quad (23)$$

$$G_W = \int_{W^t} (\nabla N_w)^T \frac{\rho_w k_w}{g} N_U dW^t \quad (24)$$



پارامترهای رابطه (31) در روابط (32) تا (39) آمده‌اند:

$$S_{aa} = \int_{W^t} \nabla N_a^T \frac{\rho_a k_a}{\gamma_a} \nabla N_a dW^t \quad (32)$$

$$S_{aw} = \int_{W^t} \nabla N_a^T \frac{\rho_a H k_w}{\gamma_w} \nabla N_w dW^t \quad (33)$$

$$G_a = \int_{W^t} \nabla N_a^T \frac{\rho_a}{g} (H k_w + k_a) N_a dW^t \quad (34)$$

$$H_a = \int_{W^t} N_a^T \rho_a [(1-s_r + H s_r)(1+n)m^T + (1-H)g_1 D] B dW^t \quad (35)$$

$$T_{aa} = \int_{W^t} N_a^T \beta n (1-s_r + H s_r) N_a dW^t + \int_{W^t} N_a^T n \rho_a (H-1)(-g_1 D D_s^{-1} + g_2) N_a dW^t \quad (36)$$

$$T_{aw} = \int_{W^t} N_a^T n \rho_a (H-1)(g_1 D D_s^{-1} - g_2) N_w dW^t \quad (37)$$

$$R_a^{t+dt} = - \int_{W^t} \nabla N_a^T \rho_a (k_a + H k_w) \nabla z dW^t - \int_{G^t} N_a^T \rho_a (Q_a^{t+dt} + H Q_w^{t+dt}) dG^t \quad (38)$$

$$f_a^t = \int_{W^t} N_a^T n \rho_a (H-1) g_1 (\mathcal{E} - m P_a^t) dW^t + \left( \int_{W^t} N_a^T n \rho_a (H-1) g_1 D B dW^t \right) \mathcal{U} + \left( \int_{W^t} N_a^T n \rho_a (H-1) g_1 D D_s^{-1} N_a dW^t \right) P_a^t - \left( \int_{W^t} N_a^T n \rho_a (H-1) g_1 D D_s^{-1} N_w dW^t \right) P_w^t + \left( \int_{W^t} \nabla N_a^T \frac{\rho_a k_a}{\gamma_a} \nabla N_a dW^t \right) P_a^t + \left( \int_{W^t} \nabla N_a^T \frac{\rho_a H k_w}{\gamma_w} \nabla N_w dW^t \right) P_w^t \quad (39)$$

معادله دیفرانسیل تعادل و شکل مؤلفه‌ای آن در روابط (40)

تا (41) آمده است:

$$R_w^{t+dt} = - \int_{G^t} N_w \rho_w W^{t+dt} n dG^t - \int_{W^t} \nabla N_w^T \rho_w k_w \nabla z dW^t \quad (25)$$

$$f_w^t = \int_{W^t} N_w^T n \rho_w g_1 (\mathcal{E} - m P_a^t) dW^t - \left( \int_{W^t} N_w^T n \rho_w g_1 D B dW^t \right) \mathcal{U} + \left( \int_{W^t} N_w^T n \rho_w g_1 D D_s^{-1} N_a dW^t \right) P_a^t - \left( \int_{W^t} N_w^T n \rho_w g_1 D D_s^{-1} N_w dW^t \right) P_w^t + \left( \int_{W^t} \nabla N_w^T \frac{\rho_w k_w}{\gamma_w} \nabla N_w dW^t \right) P_w^t \quad (26)$$

معادله دیفرانسیل پیوستگی هوا با در نظر گرفتن جرم هوای محلول در آب که از قانون هانری به دست می‌آید [9]، به صورت رابطه (27) است:

$$\frac{\partial (n s_a \rho_a)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (n \rho_a (s_a v_i^a + H s_r v_i^w)) = 0 \quad (27)$$

که در آن  $s_a = 1 - s_r$ ،  $v_i^a$ ،  $v_i^w$  و  $H$  به ترتیب سرعت مطلق هوا، سرعت مطلق آب، ضریب هانری و جرم حجمی هوا می‌باشند [15]. جهت به دست آوردن معادلات نهایی از روابط (28) و (29) مربوط به سرعت‌های نسبی فازهای آب و هوا استفاده می‌شود:

$$v_i^w = \frac{w_i}{n s_r} + v_i^a \quad (28)$$

$$v_i^a = \frac{q_i}{n s_a} + v_i^w \quad (29)$$

که در آن  $q$  و  $w$  به ترتیب سرعت‌های نسبی هوا و آب است. با استفاده از قانون داریسی برای فاز هوا رابطه زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$q_i = -\rho_a k_a \left( \frac{\nabla p_a}{\gamma_a} + \nabla z + \frac{\mathcal{E}}{g} \right) \quad (30)$$

معادلات اجزاء محدود حاکم بر معادله پیوستگی هوا به شکل زیر به دست می‌آید:

$$S_{aa} dP_a + S_{aw} dP_w + T_{aa} P_a^{t+dt} + T_{aw} P_w^{t+dt} + H_a \mathcal{U}^{t+dt} + G_a \mathcal{U}^{t+dt} = R_a^{t=dt} - f_a^t \quad (31)$$

$$\delta d\varepsilon = B_L \delta dU \quad (45)$$

$$\delta d\eta = B_{NL} \delta dU \quad (46)$$

$$K_T dU + L_W dP_W + L_a dP_a + G_U \mathcal{E}^{t+dt} = R_u^{t+dt} - f_u^{t+dt} \quad (47)$$

پارامترهای رابطه فوق در روابط (48) تا (53) آمده‌اند:

$$K_T = \int_{W^t} B_L^T D B_L dW^t + \int_{W^t} B_{NL}^T (\underline{\sigma}^t - \underline{m} p_a^t) B_{NL} dW^t \quad (48)$$

$$L_a = - \int_{W^t} B_L^T (m - DD_s^{-1}) N_a dW^t \quad (49)$$

$$L_W = \int_{W^t} B_L D D_s^{-1} N_W dW^t \quad (50)$$

$$G_U = \int_{W^t} N_U^T \rho N_U dW^t \quad (51)$$

$$R_u^{t+dt} = \int_{G^t} N_U^T T^{t+dt} dG^t + \int_{W^t} N_U^T \rho b_0 dW^t \quad (52)$$

$$f_u^t = \int_{W^t} B_L^T (\underline{\sigma}^t - \underline{m} p_a^t) dW^t + \left( \int_{W^t} B_L^T m N_a dW^t \right) P_a^t \quad (53)$$

جمع‌بندی کل معادلات اجزاء محدود حاکم بر مسأله به شکل رابطه (54) می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} K_T & L_W & L_a \\ 0 & S_{WW} & 0 \\ 0 & S_{aW} & S_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dU \\ dP_W \\ dP_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ H_W & T_{WW} & T_{Wa} \\ H_a & T_{aW} & T_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}^{t+dt} \\ \mathcal{I}_W^{t+dt} \\ \mathcal{I}_a^{t+dt} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_U & 0 & 0 \\ G_a & 0 & 0 \\ G_W & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}^{t+dt} \\ \mathcal{I}_W^{t+dt} \\ \mathcal{I}_a^{t+dt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_u^{t+dt} \\ R_W^{t+dt} \\ R_a^{t+dt} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_u^t \\ f_W^t \\ f_a^t \end{bmatrix} \quad (54)$$

معادله (54) به صورت رابطه (55) ساده‌نویسی می‌شود:

$$\mathbf{M} \cdot \mathcal{E}^{t+dt} + \mathbf{C} \cdot \mathcal{I}^{t+dt} + \mathbf{K}^t \cdot \mathbf{dU} = \mathbf{R}^{t+dt} - \mathbf{F}^t \quad (55)$$

برای حل دستگاه معادله (55)، از روش تکراری نیوتون رافسون اصلاح شده استفاده می‌نماییم. در این روش الگوریتم حل مسأله به شرح زیر می‌باشد [16]:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i - \rho \dot{u}_i = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} p_a) + p_{a,i} + \rho b_i - \rho \dot{u}_i = 0 \quad (41)$$

شکل انتگرالی (ضعیف) معادله (41) به صورت معادله (42) می‌باشد:

$$\begin{aligned} & - \int_W (\sigma_{ij} - \delta_{ij} p_a) \delta \varepsilon_i dW - \int_W p_a \delta \varepsilon_{ii} dW + \\ & \int_W \rho b_i \delta u_i dW - \int_W \rho \dot{u}_i \delta u_i dW + \\ & \int_G T \delta u_i dG = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

شکل انتگرالی (ضعیف) معادله (42) برای زمان  $t + dt$  و با اعمال تغییرات لازم جهت نوشتن برای فرمولاسیون تغییر شکل‌های بزرگ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & - \int_{W^t} (\underline{\sigma}^t - \underline{m} p_a^t) \delta (E^t + dE) dW^t - \\ & \int_{W^t} P_a^{t+dt} \text{div}(\delta u)^{t+dt} dW^t + \\ & \int_{W^t} (dS - \underline{m} dp_a) \delta (E^t + dE) dW^t - \\ & \int_{W^t} \rho b_0 \delta (du) dW^t + \int_{W^t} \rho \dot{u}^{t+dt} \delta (du) dW^t - \\ & \int_G T^{t+dt} (du) dG^t = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

با اعمال معادله رفتاری برای حالت فرمولاسیون لاگرانژین به‌هنگام خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & - \int_{W^t} (\underline{\sigma}^t - \underline{m} p_a^t) \delta d\eta dW^t + \\ & \int [D d\varepsilon - DD_s^{-1} d(p_a - p_w)] \delta d\varepsilon dW^t + \\ & \int_{W^t} p_a^t \text{div} \delta (du) dW^t + \int_{W^t} d p_a \text{div} \delta (du) dW^t - \\ & \int_{W^t} \rho b_0 \delta (du) dW^t + \int_{W^t} \rho \dot{u}^{t+dt} \delta (du) dW^t - \\ & \int_G T^{t+dt} \delta (du) dG^t + \int_{W^t} (\underline{\sigma}^t - \underline{m} p_a^t) \delta d\varepsilon dW^t = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

#### 4- معادلات اجزاء محدود

با اعمال روابط (45) و (46)، فرمول‌بندی اجزاء محدود معادله تعادل برای حالت لاگرانژین به‌هنگام به صورت رابطه (47) است:



$$\mathbf{U}^{t+\Delta t(k)} = \frac{4}{\Delta t^2} \cdot \left( \mathbf{U}^{t+\Delta t(k-1)} - \mathbf{U}^t + \Delta \mathbf{U}^{(k)} \right) - \frac{4}{\Delta t^2} \cdot \mathbf{U}^t + \mathbf{U}^t \quad (63)$$

با تعریف رابطه (64) می توان معادلات را ساده سازی نمود:

$$\bar{\mathbf{K}}^t = \mathbf{K}^t + \frac{4}{\Delta t^2} \cdot \mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t} \cdot \mathbf{C} \quad (64)$$

با توجه به روابط فوق، دستگاه معادلات حاکم بر محیط متخلخل غیراشباع تحت بار کلی دینامیکی به شکل زیر است [15]:

$$\bar{\mathbf{K}}^t \cdot \Delta \Delta^{(k)} = \mathbf{R}^{(t+\Delta t)} - \mathbf{F}^{t(k-1)} - \left( \frac{4}{\Delta t^2} \cdot \mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t} \cdot \mathbf{C} \right) \cdot \left( \mathbf{U}^{t+\Delta t(k-1)} - \mathbf{U}^t \right) + \left( \frac{4}{\Delta t} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{C} \right) \cdot \mathbf{U}^t + \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}^t \quad (65)$$

از نرم افزار UDAMN که تعمیم یافته نرم افزار UDAM است برای تحلیل محیط های خاکی غیراشباع در تغییر شکل های بزرگ با فرمولاسیون لاگرانژین به هنگام (Updated Lagrangian)، یعنی همان معادلات فوق، استفاده شده است [11، 15].

## 5- مثال های حل شده

### 5-1- اعتبار سنجی

جهت کنترل عملکرد برنامه تهیه شده، تحکیم یک بعدی ستون خاک اشباع که به تحکیم ترزاقی معروف است انجام شده و نتایج با تئوری ترزاقی مقایسه گردید، شکل (1). در این شکل عملکرد دقیق

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{U}^{t+\Delta t(k)} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}^{t+\Delta t(k)} + \mathbf{K}^t \cdot \Delta \mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{R}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}^{t(k-1)} \quad (56)$$

که در آن:

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t(k)} = \mathbf{U}^{t+\Delta t(k-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(k)} \quad (57)$$

که مقادیر اولیه به شرح زیر می باشند:

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t(0)} = \mathbf{U}^t \quad (58)$$

$$\mathbf{F}^{t+\Delta t(0)} = \mathbf{F}^t \quad (59)$$

بدیهی است که برای حل دستگاه معادله، بایستی جملات شتاب و سرعت را بر حسب تغییر مکان و نمو آن بازنویسی نمود. برای این منظور از روش نیومارک استفاده می شود. اگر ضرایب  $\alpha$  و  $\delta$  را به ترتیب برابر  $0/25$  و  $0/5$  در نظر گرفته شود، روش شناخته شده دوزنقه ای به دست می آید [16] که در آن:

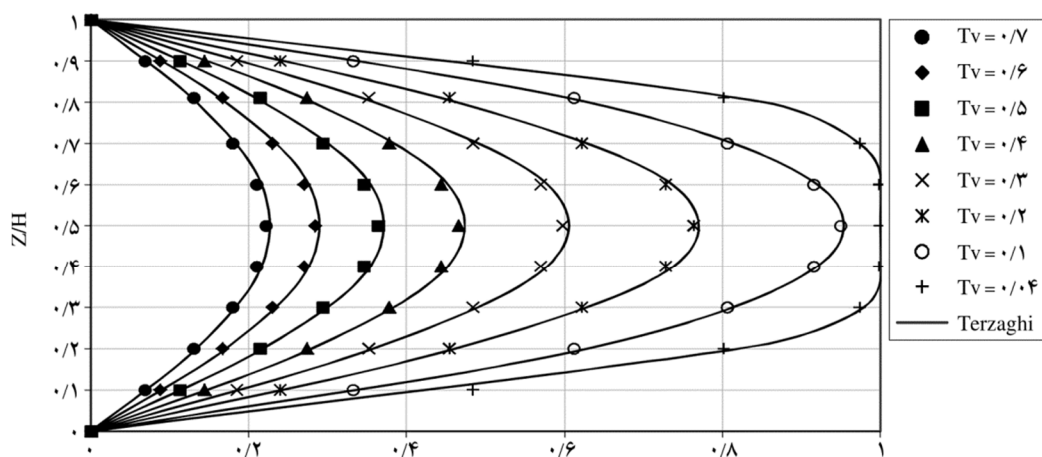
$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left( \mathbf{U}^t + \mathbf{U}^{t+\Delta t} \right) \quad (60)$$

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left( \mathbf{U}^t + \mathbf{U}^{t+\Delta t} \right) \quad (61)$$

بنابراین می توان مقادیر شتاب و سرعت مربوط به لحظه

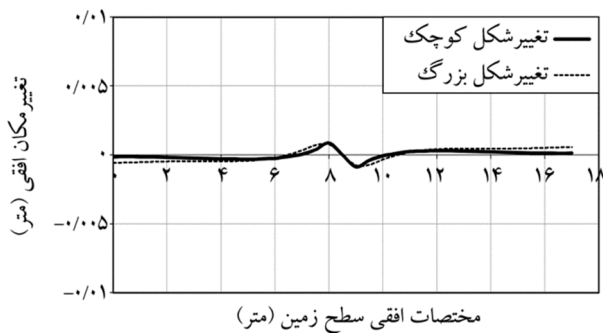
$t + Dt$  و گام  $k$  را به صورت زیر به دست آورد:

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t(k)} = \frac{2}{\Delta t} \cdot \left( \mathbf{U}^{t+\Delta t(k-1)} - \mathbf{U}^t + \Delta \mathbf{U}^{(k)} \right) - \mathbf{U}^t \quad (62)$$



فشار آب حفره ای نرمالیزه

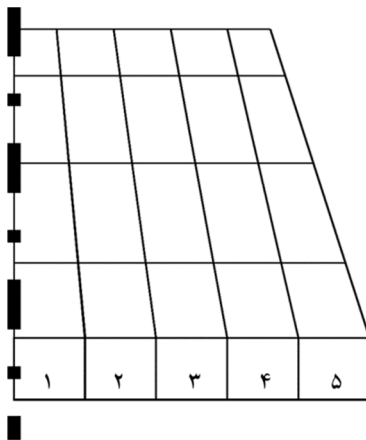
شکل (1): مقایسه تغییرات فشار آب حفره ای در ارتفاع نرمالیزه با تحکیم یک بعدی ترزاقی



شکل (5): منحنی تغییر مکان افقی سطح زمین در تغییر شکل‌های بزرگ و کوچک در زمان 300 ثانیه (درجه اشباع 0/9)

بی در عمق زمان‌های مختلف، تغییر مکان سطح زمین در یک زمان مشخص در درجات اشباع مختلف و تغییر مکان افقی را نشان می‌دهد.

**مثال 2:** این مثال، بررسی وضعیت یک خاک ریز از خاک غیراشباع در حین ساخت است، شکل (6). معمولاً خاک‌ریزهای ساخته شده در اجرای پروژه‌های مختلف حالت غیراشباع داشته و این مثال می‌تواند به خوبی وضعیت عملی آنها را بازسازی نماید. در این مثال فرض شده بر روی یک لایه موجود خاک غیراشباع، خاک ریزی به ارتفاع 5 متر و برای مدلسازی مراحل مختلف ساخت خاک ریز، هر المان به ارتفاع یک متر در 10 لایه ساخته شود. اشکال (7) تا (9) پروفیل نشست روی محور خاکریز در طی ساخت، منحنی تغییرات فشار آب حفره‌ای روی محور خاکریز و تغییرات نشست روی محور خاکریز در طی ساخت برای یک درجه اشباع مشخص را نشان می‌دهند.

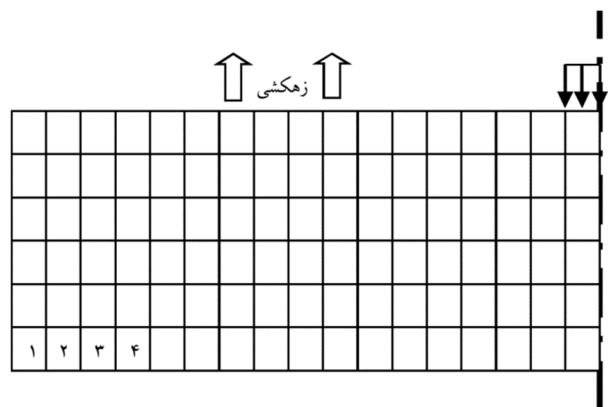


شکل (6): خاکریز تحلیل شده

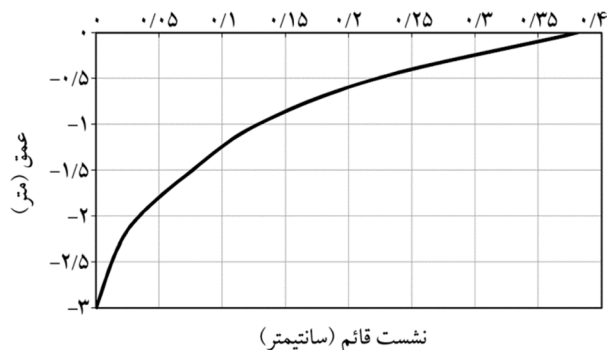
و مناسب برنامه با تئوری تحکیم یک بعدی دیده می‌شود.

**مثال 1:** بررسی نشست یک لایه افقی خاک غیر اشباع

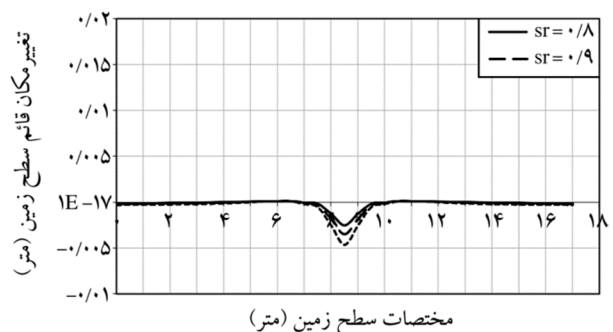
تحت یک سربار یکنواخت محدود در مرکز می‌باشد، شکل (2). این لایه خاک شامل 245 گره و 204 المان غیراشباع است. زهکشی جهت آب و هوا از مرز بالایی لایه خاک انجام می‌گیرد، شکل‌های (3) تا (5) به ترتیب نشست قائم زیر مرکز



شکل (2): وضعیت لایه خاک و بارگذاری با محور تقارن

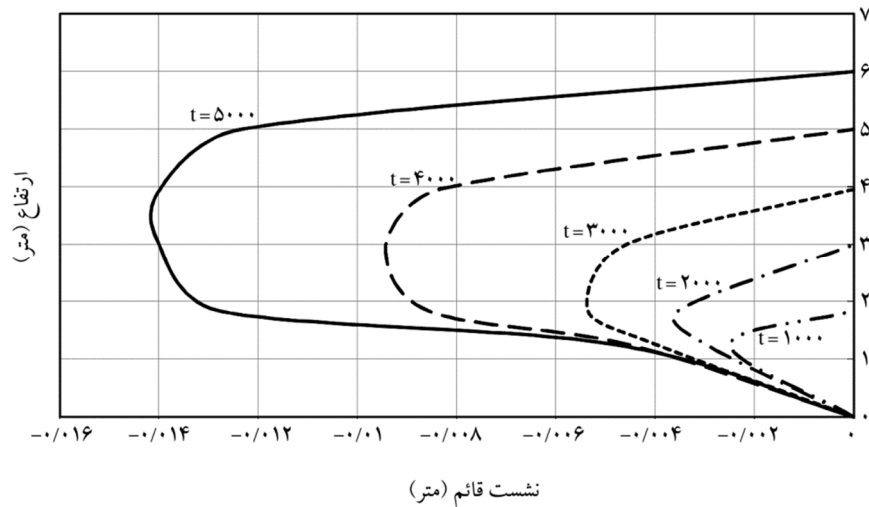


شکل (3): منحنی نشست قائم زیر مرکز بی در عمق (زمان 500 ثانیه و درجه اشباع 0/9)

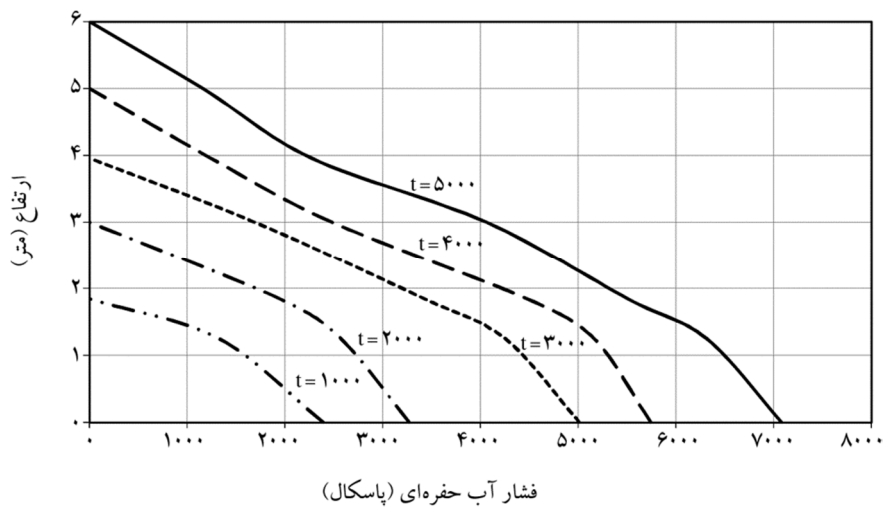


شکل (4): تغییر مکان قائم سطح زمین در زمان 300 ثانیه برای مقادیر مختلف درجه اشباع

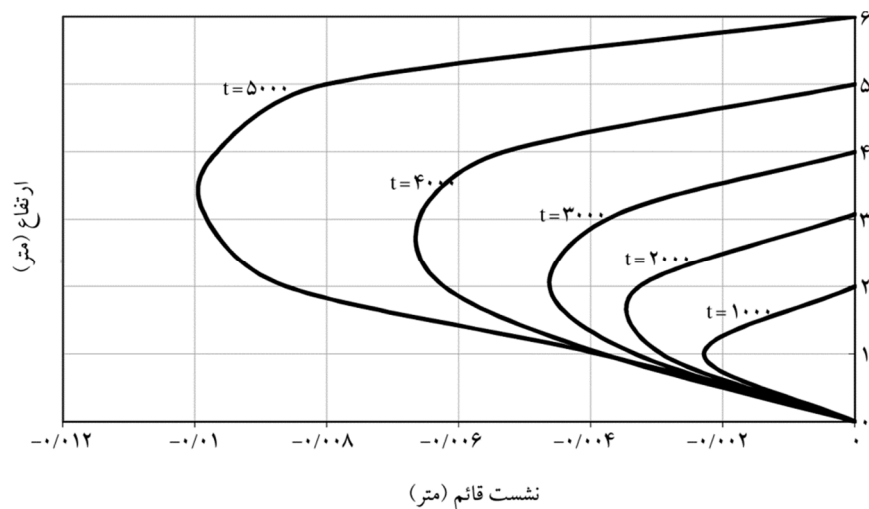




شکل (7): پروفیل نشست روی محور خاکریز در طی ساخت



شکل (8): منحنی تغییرات فشار آب حفره‌ای روی محور خاکریز



شکل (9): منحنی تغییرات نشست روی محور خاکریز در طی ساخت برای درجه اشباع 0/8



8. Yoshimi, Y. and Osterberg, J.O. (1963) Compression of partially saturated cohesive soils. *J. Soil Mech. and Fon. Eng. Div.*, ASCE, **89**(S.M.4).
9. Fredlund, D.G., Rahardjo, H., and Fredlund, M.D. (2012) *Unsaturated Soil Mechanics in Engineering Practice*. John Wiley & Sons.
10. Alonso, E.E., Gens, A., and Josa, A. (1990) A Constitutive model for partially saturated soils. *Geotechnique*, **40**(3), 405-430.
11. Gatmiri, B. and Nanda, A. (1989) *Finite Element Analysis of Unsaturated Elasto-Plastic Soils*. Report of CERMES, ENPC.
12. Coussy, O. (1991) *Mecanique Des Milieux Poreux Editions Technip*. Paris.
13. Sheng, A.D., Gens, D.G., Fredlund, S., and Sloan W. (2008) Unsaturated soils: From constitutive modeling to numerical algorithms. *Computer and Geotechnics*, **35**, 810-824.
14. Chen, W.F. and Mizuno, E. (1990) *Nonlinear Analysis in Soil Mechanics*. Elsevier, Amsterdam.
15. Mirmohammad Sadeghi, M. (2001) *Large Deformation Analysis of Unsaturated Soils*. Ph.D. Thesis, Civil Engineering Department, Tehran University.
16. Bathe, K.J. (1982) *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall.

## 7- نتیجه گیری

فرمولاسیون تغییر شکل‌های بزرگ با توصیف لاگرانژی به‌هنگام برای خاک‌های غیراشباع با استفاده از متغیرهای حالت به‌جای تنش مؤثر به دست آمد. سپس با توجه به کوپله بودن کامل معادلات، تأثیرات تغییرات مکش و درجه اشباع در رفتار خاک‌های غیراشباع با استفاده از مثال‌های ارائه‌شده و نتایج حاصل از نرم‌افزار اجزاء محدود نوشته شده، نشان داده شد. همان‌گونه که نتایج نشان می‌دهد تأثیر زمان، درجه اشباع و مکش کاملاً مشهود بوده و با افزایش درجه اشباع و کاهش مکش از سختی خاک کم شده و تغییر شکل‌های بزرگ‌تر حاصل می‌گردد. همچنین اثرات تغییرات متغیرهای حالت در نشست سطح زمین در سازه‌های خاکی در مثال‌ها بیان شده است.

## مراجع

1. Bishop, A.W. (1959) The principle of effective stress. *Teknik Ukeblad*, **39**, 859-863.
2. Bishop, A.W. and Blight, G.E. (1963) Some aspects of effective stress in saturated and unsaturated soils. *Geotechnique*, **13**(3), 177-197.
3. Burland, J.B. (1965) Some aspects of the mechanical behavior of partly saturated soils. *Proceedings of the Conference on Moisture Equilibrium and Moisture Changes*, Soil Beneath Covered Areas, a Sump, Butterworth, Guilford, UK, 270-278.
4. Matyas, E.L. and Radhakrishna, H.S. (1968) Volume change characteristics of partially saturated soils. *Geotechnique*, **18**(4), 432-448.
5. Gatmiri, B. and Delage, P. (1995) A new void ratio state surface formulation for nonlinear elastic constitutive modelling of unsaturated soil. *1<sup>st</sup> Int. Conf. on Unsaturated Soils*. Paris.
6. Gatmiri, B., Moussavi, J., Tavakoli, S., and Delage, P. (1995) Numerical approach of elasto-plastic consolidation of unsaturated soils. *1<sup>st</sup> International Conference on Unsaturated Soils*, Paris, France.
7. Fredlund, D.G. and Rahardjo, H. (1993) *Soil Mechanics for Unsaturated Soils*. John Wiley & Sons.



## Updated Lagrangian Description of Large Deformation Analysis of Unsaturated Soils under Dynamic and Static Loadings

Masoud Mirmohammad Sadeghi<sup>1</sup> and Behrouz Gatmiri<sup>2</sup>

1. Isfahan Higher Education and Research Institute (IHEARI), Department of Water and Environment, Laboratory of Soil Mechanics, Ministry of Energy, Isfahan, Iran, Corresponding Author: [msadeghi@ieht.ac.ir](mailto:msadeghi@ieht.ac.ir)
2. Professor of Civil Engineering Department, Tehran University, Tehran, Iran

Extensive areas of the earth are covered by unsaturated soils. Besides, construction of fills, embankments and earth dams are related to compacted soils, which are a very widespread class of unsaturated soils, and there are many geotechnical problems with these soils. The unsaturated soil is assumed to be a three-phase porous media with a solid phase and two fluid phases, water and air. Therefore, considerable attempts have been made to explain or to predict shear strength and volume change behaviour of unsaturated soils in terms of effective stress. Bishop [1] modified classical expression of effective stress for saturated soils to the unsaturated soils in the following form:

$$\sigma' = (\sigma - p_a) + \chi(p_a - p_w)$$

in which  $\sigma'$  is effective stress,  $p_a$  and  $p_w$  are pore air and pore water pressure respectively,  $(p_a - p_w)$  is suction and  $\chi$  is a parameter that mainly depends on degree of saturation. Many researchers showed that the use of a unique effective stress relation was not fully satisfactory to describe the various aspects of unsaturated soil behavior. The more realistic behavior of unsaturated soils could be explained using state variables and two independent tensorial variables  $(p_a - p_w)$  and  $(\sigma - p_a)$  i.e. the total stress and suction, respectively) and state surface of void ratio ( $e$ ) and degree of saturation ( $S_r$ ) that provide the variation of them with applied total stress and suction. For a given soil, if the fabric does not change significantly, void ratio and degree of saturation are main factors controlling permeability. There are also some empirical relationships based on suction. Thus the permeability of water and air are functions of void ratio and degree of saturation.

To obtain the governing equations for the mechanics of unsaturated porous media, the continuity relations of water and air and the dissolved air in water (Henry's law) are used.

The motion of water and air can be described by generalized Darcy's law. The total mechanical equilibrium is derived by summing of linear momentum balance of three phases and neglecting relative acceleration of fluids.

The basic approach in the incremental step-by-step solution is to assume that the solution for time  $t$  is known and that the solution for the time  $t+dt$  is required. In large deformation analysis, special attention must be given to the fact that the configuration of the body is changing continuously. In the updated - lagrangian (UL) formulation, all static and kinematic variables are referred to the configuration at time  $t$ , and the second Piola-Kirchhoff stress and lagrangian strain tensors can be employed effectively at time  $t+dt$ .

For linearizing, we use the Jaumann stress increments instead of second Piola-kirchhoff stress increments. By using the appropriate stress-strain relation for unsaturated soils and the weighted residual methods, the integral equations are obtained. Utilizing the appropriate shape functions, the basic finite element equations are obtained. In the solution of the nonlinear response, the governing equation must be satisfied at the complete time by using a step-by-step incremental analysis and an iteration procedure like modified Newton-Rophson method is used. For a quantitative solution, the resultant equations are discretized in time by Newmark's solution and the final finite element equations are obtained.

Finally, by the UDAMN finite element code, which developed by authors, two problems, i.e. the settlement of unsaturated ground under loading and step construction of an unsaturated embankment, have been solved by this method.

**Keywords:** Unsaturated Soil; Large Deformation Analysis; Updated Lagrangian Description; Dynamic Analysis; Finite Element; State Variable; State Surface