

نوع مقاله: یادداشت پژوهشی

چکیده

در این مقاله، روش جنینگر با استفاده از تابع درون‌یابی اسپلاین درجه سه ارتقاء یافته است. در این پژوهش، برای اینکه بتوان به صورت مقایسه‌ای مزیت‌ها و معایب روش جنینگر که مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک است را نسبت به روش درون‌یابی اسپلاین ارزیابی نمود، یک سیستم خطی یک درجه آزاد میرا تحت بارگذاری هارمونیک سینوسی در نظر گرفته شده است. مقادیر دقیق ضریب پاسخ تغییر شکل این سیستم برای فرکانس‌های تحریک مختلف در دسترس است. مقادیر تقریبی ضریب پاسخ تغییر شکل این سیستم به ازای فرکانس‌های مختلف تحریک با فرض درون‌یابی خطی تحریک و نیز با فرض درون‌یابی با تابع اسپلاین محاسبه گردید و با مقادیر متناظر دقیقشان مقایسه شد. این کار برای میرایی‌های دو، پنج، ده و بیست درصد انجام گردید. نتایج کار حاکی از آن بود که هرگاه تعداد نقاطی که موج سینوسی به وسیله آن تقریب زده می‌شود کم باشد و همچنین میزان میرایی نیز پایین باشد، درون‌یابی با تابع اسپلاین دقت بالاتر قابل ملاحظه‌ای نسبت به حالت درون‌یابی خطی دارد. لذا با توجه به اینکه در درون‌یابی به روش اسپلاین، پیوستگی شیب و مشتق دوم در نقاط داخلی حفظ می‌گردد، پیشنهاد می‌شود از این روش نیز برای محاسبه پاسخ دینامیکی سیستم‌های خطی استفاده شود و نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از روش جنینگر مقایسه شود و در صورت تفاوت قابل ملاحظه در نتایج تحلیل حاصل از این دو روش، تصمیمات مناسب اتخاذ گردد.

واژگان کلیدی: روش جنینگر، تابع اسپلاین درجه سه، سیستم دینامیکی خطی، تحریک هارمونیک، ضریب پاسخ تغییر شکل نیروی هارمونیک.

ارتقاء روش جنینگر با استفاده از تابع درون‌یابی اسپلاین برای محاسبه عددی ضریب پاسخ سیستم‌های یک درجه آزاد خطی

مسعود محمودآبادی (نویسنده مسئول)

استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، گروه عمران، دانشگاه قم، قم، ایران،
m.mahmoudabadi@qom.ac.ir

بابک تقوی

دانشجوی دکتری مهندسی عمران - سازه، دانشکده فنی و مهندسی،
گروه عمران، دانشگاه قم، قم، ایران

سید محمدرضا حسینی

دانشجوی دکتری مهندسی عمران - سازه، دانشکده عمران، دانشگاه
صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران

سید محمدجواد حسینی

دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران - سازه، دانشکده فنی و
مهندسی، گروه عمران، دانشگاه قم، قم، ایران

۱- مقدمه

اسم آن مشخص است، نقاط شتاب‌نگاشت با پاره‌خط‌هایی به یکدیگر متصل می‌شوند، در نتیجه، در محل اتصال پاره‌خط‌ها، شیب آنها لزوماً با یکدیگر برابر نیست و فقط مقادیر تابع در محل اتصال آنها با یکدیگر برابر است. با توجه به اینکه درون‌یابی خطی تحریک یکی از ساده‌ترین روش‌های درون‌یابی است، در نتیجه، اگر بازه‌های زمانی بین نقاط شتاب‌نگاشت نسبت به دوره تناوب طبیعی سازه کوچک باشد، درون‌یابی خطی قابل قبول بوده و دارای دقت کافی می‌باشد (Chopra, 2012). لازم به ذکر است که روش جنینگر مبتنی بر روابط دقیق و فرض

روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک (Nigam & Jennings, 1968, 1969) که بعضاً در مراجع فنی فارسی (Hosseini Hashemi et al., 2002; Izadinia & Jamshidi, 2016; Esmailabadi et al., 2015; Shafiee-fard, 2019) از آن به روش جنینگر یاد می‌شود، روش متعارف و معمولی است که برای محاسبه پاسخ سازه‌ها در برابر زلزله در محدوده رفتار خطی از آن استفاده می‌شود. علت اصلی نام‌گذاری این روش به نام جنینگر به مراجع (Nigam & Jennings, 1968, 1969) برمی‌گردد. در روش درون‌یابی خطی تحریک، همان‌طور که از

نعیم (Naeim, 1996) شتاب‌نگاشت‌های ۲۰ ساختمان که شتاب آنها در هنگام زلزله نورتریج ثبت شده بود را مورد بررسی و مطالعه قرار داد. با توجه به اینکه در تمام طبقات این ساختمان‌ها دستگاه شتاب‌نگار نصب نشده بود، او با استفاده از درون‌یابی با تابع اسپلاین، شتاب سایر طبقات را برآورد نمود و سپس مقادیر برش و لنگر واژگونی پایه ساختمان‌ها را محاسبه کرد. وامواتسیکس و کرنل (Vamvatsikos & Cornell, 2004) نقاط گسسته به‌دست‌آمده از تحلیل دینامیکی افزایشی را هم با استفاده از درون‌یابی خطی و هم با استفاده از درون‌یابی اسپلاین به یکدیگر متصل نمودند و سپس نمودارهای به‌دست‌آمده را مورد استفاده قرار دادند. معترف (Motaref, 2006) نیز در رساله کارشناسی ارشد خود، با الگوبرداری از کار انجام شده در مرجع (Vamvatsikos & Cornell, 2004) این کار را انجام داد و نقاط پراکنده به‌دست‌آمده از تحلیل دینامیکی افزایشی را با استفاده از درون‌یابی با تابع اسپلاین مکعبی به یکدیگر متصل نمود و منحنی همواری را بدین ترتیب به دست آورد. یو و همکاران (Yu et al., 2013) از یک طرح شبه‌درون‌یابی کواریتیک اسپلاین چند سطحی برای حل معادله غیرخطی (kdv) استفاده کردند که تعداد زیادی از پدیده‌های فیزیکی را نشان می‌داد. شجاعی و همکاران (Shojaee et al., 2015) یک الگوریتم انتگرال‌گیری زمانی ضمنی بدون قید و شرط پایدار را با اصلاح روش کواریتیک بی‌اسپلاین ارائه نمودند. صفاری و همکاران (Saffari et al., 2014) روش جدیدی را برای تحلیل غیرخطی سازه‌ها با استفاده از روش تکراری برگرفته از قاعده یک‌چهارم بر اساس تابع اسپلاین ارائه نمودند. رستمی و شجاعی (Rostami & Shojaee, 2017) خانواده‌ای از الگوریتم‌های انتگرال‌گیری بی‌اسپلاین مکعبی با اتلاف و پراکندگی عددی قابل کنترل را برای دینامیک سازه‌ها پیشنهاد کردند. محمدی‌نیا و همکاران (Mohammadinia et al., 2020) فرمولی ترکیبی از بی‌اسپلاین را ارائه کردند. آنها نوع جدیدی از توابع شکل کرووی هانکل را برای مدل‌سازی مسائل الاستواستاتیک پیشنهاد کردند. مهدوی و همکاران (Mahdavi et al., 2015) در یک مطالعه مقایسه‌ای، کاربرد روش‌های چپیشف و اسپلاین را

تغییرات خطی تحریک است و برای سیستم‌های یک درجه آزاد دینامیکی خطی قابل استفاده است. در این روش تنها فرضی که برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت این سیستم‌ها استفاده می‌شود، فرض خطی بودن تحریک در فاصله Δt می‌باشد؛ به عبارت دیگر، سمت چپ معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت که به صورت زیر است، بدون هیچ‌گونه تغییری باقی می‌ماند و تنها فرض استفاده شده در این روش این است که سمت راست معادله حرکت تقریب زده می‌شود. تنها تقریب استفاده شده به این صورت است که تغییرات شتاب پایه به صورت خطی در بازه Δt در نظر گرفته می‌شود که در واقعیت مطمئناً به این صورت نیست.

$$\ddot{m}u + c\dot{u} + ku = -\ddot{m}_g(t) \quad (1)$$

تا آنجا که مؤلفان این مقاله جستجو نموده‌اند، روش جینگز تاکنون ارتقاء نیافته است و هدف این مقاله، ارتقاء این روش با استفاده از تابع اسپلاین مکعبی است که نسبت به درون‌یابی خطی و دیگر درون‌یابی‌ها از دقت بالاتری برخوردار است.

در این تحقیق، به جای استفاده از روش درون‌یابی خطی تحریک از روش درون‌یابی با تابع اسپلاین درجه سوم استفاده شده است. در کتب مربوط به روش‌های عددی در مهندسی (Chapra & Canale, 2006; Burden & Faires, 2011) ذکر شده است که درون‌یابی به روش اسپلاین مکعبی نسبت به درون‌یابی‌های دیگر از دقت بالاتری برخوردار است. به همین علت در نرم‌افزارهای گرافیکی نظیر اتوکد و فتوشاپ نیز به صورت پیش‌فرض این نوع درون‌یابی گنجانده شده است. همچنین، در این کتب می‌توان جزئیات مربوط به درون‌یابی به روش اسپلاین را مشاهده نمود. همچنین، در کارهای تحقیقاتی زیادی از تابع اسپلاین استفاده شده است، اما بررسی‌های نویسندگان این مقاله برای پیدا کردن تحقیقی که به جای درون‌یابی خطی تحریک از درون‌یابی نوع دیگری استفاده کرده باشند به نتیجه نرسیده است. در نتیجه، به‌طور کلی تحقیقاتی که در آنها از تابع اسپلاین برای مقاصد دیگری به جز درون‌یابی تحریک استفاده شده در ادامه ذکر خواهند شد.

است که مجموعه نقاط (X_0, Y_0) ، (X_1, Y_1) ، ... و (X_n, Y_n) را به هم وصل می‌کند. یکی از معایب این روش عدم مشتق‌پذیری در انتهای زیربازه‌ها می‌باشد. تغییر هندسی این مطلب همان عدم همواری نمودار است. برای فائق آمدن بر این مشکل، در روش اسپلاین مکعبی، از توابع چندجمله‌ای درجه ۳ برای هر زیربازه استفاده می‌شود. با مساوی قرار دادن مقادیر این توابع و نیز مشتقات اول و دوم آنها در نقاط اتصال، معادلاتی برای محاسبه ضرایب مجهول این چندجمله‌ای‌ها به دست می‌آید. البته، در نقاط ابتدا و انتهای بازه نیز باید مقادیر تابع را جایگذاری کرد تا دو معادله دیگر بر حسب ضرایب مجهول چندجمله‌ای‌های درجه ۳ به دست آید. همچنین، در نقاط ابتدا و انتهای بازه باید از شرایط مرزی آزاد (صفر قرار دادن مشتق دوم توابع درجه ۳ در ابتدا و انتهای بازه) یا شرایط مرزی مقید (صفر قرار دادن مشتق اول توابع درجه ۳ در ابتدا و انتهای بازه) استفاده کرد تا دو معادله دیگر نیز بر حسب ضرایب مجهول چندجمله‌ای‌های درجه ۳ به دست آید. با در نظر گرفتن تمام این معادلات، ضرایب مجهول چندجمله‌ای‌های درجه ۳ محاسبه می‌شود. لازم به ذکر است که در این تحقیق از شرایط مرزی آزاد استفاده شده است.

معمولاً برای محاسبه طیف پاسخ خطی سازه‌ها در برابر شتاب‌نگاشت‌هایی مانند ال‌سترو، طبس و... از روش جینگز که بر اساس روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک می‌باشد استفاده می‌شود. محاسبه طیف پاسخ خطی سازه‌ها از موضوعات پایه در مهندسی زلزله است زیرا قبل از اینکه وارد بررسی پاسخ غیرخطی سازه‌ها شویم باید رفتار خطی سازه‌ها مورد ارزیابی قرار گیرد.

در بخش‌های بعدی مقاله، ابتدا روش جینگز با جزئیات، شرح داده شده است و به دنبال آن روش درون‌یابی اسپلاین مکعبی به‌طور مفصل توضیح داده شده است. بعد از آن، ضریب پاسخ تغییر شکل یک سیستم خطی یک درجه آزاد تحت بارگذاری هارمونیک سینوسی با استفاده از روش درون‌یابی خطی و نیز با استفاده از تابع اسپلاین درجه ۳ محاسبه شده و مقادیر ضریب پاسخ تغییر شکل به‌دست آمده از این دو روش با مقادیر متناظر دقیقشان مقایسه گردیده‌اند.

برای تحلیل هندسی غیرخطی سازه‌های خرابی ارزیابی کردند. غضنفری و همکاران (Ghazanfari et al., 2019) از تئوری‌های تیر و توابع پایه بی‌اسپلاین برای تحلیل ارتعاش آزاد سازه‌های تیر چند لایه متقاطع استفاده کردند. رستمی و شجاعی (Rostami & Shojaee, 2019) یک روش انتگرال‌گیری زمانی مستقیم را بر اساس روش با هم‌گذاری بی‌اسپلاین کوارتیک توسعه دادند. شاهرادی و عبداللهی (Shahmorad & Abdollahi, 2007) یک روش همگرایی بدون مربع برای حل عددی معادلات انتگرال فردهولم خطی بر اساس درون‌یابی هر میت-اسپلاین ارائه کردند. ملک‌نژاد و دریلی (Maleknejad & Derili, 2006, 2007) با استفاده از روش ترکیبی با هم‌گذاری اسپلاین و درون‌یابی لاگرانژ، حل عددی معادلات انتگرالی را ارائه کردند. لیو و همکاران (Liu et al., 2008) از روش درون‌یابی اسپلاین مکعبی برای تقریب منحنی مقطع راداری تک‌استاتیک (RCS) روی مجموعه‌ای از گره‌های نمونه‌برداری غیریکنواخت استفاده کردند. زرناکف و همکاران (Zhernakov et al., 2017) دقت محاسبه فرکانس‌های طبیعی یک تیر که بر پایه یک برون‌یابی نتایج عددی به‌دست آمده از توابع اسپلاین درجه ۵ حاصل گردیده بود را ارتقاء دادند. در ادامه، مطالبی که در مورد تابع اسپلاین درجه سوم (مکعبی) ذکر شده است از مرجع (Chapra & Canale, 2006) اخذ گردیده است.

روش‌های مختلفی برای درون‌یابی یک تابع در یک بازه وجود دارد که هر کدام نسبت به دیگری دارای محاسن و معایبی می‌باشند. تقریب یک تابع دلخواه روی یک بازه بسته به دلیل طبیعت نوسانی چندجمله‌ای‌ها می‌تواند خطای زیادی داشته باشد. علاوه بر این، تغییر کوچک تابع در یک زیربازه می‌تواند تأثیر زیادی در چندجمله‌ای درون‌یاب داشته باشد. به همین دلیل در عمل ترجیح داده می‌شود که بازه را به زیربازه‌های کوچک تقسیم کرده و تا جای ممکن درجه چندجمله‌ای درون‌یاب را کاهش دهند. این رهیافت، تقریب قطعه به قطعه با چندجمله‌ای‌ها نامیده می‌شود. ساده‌ترین این چندجمله‌ای‌ها، چندجمله‌ای‌های خطی (درجه یک) هستند. نمودار این توابع یک خط شکسته

۲- روش جنینگز

معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم یک درجه آزادی جرم-فنر-میراگر عبارت است از:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (2)$$

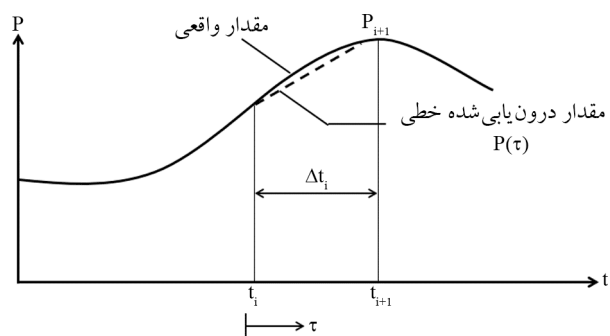
که در این معادله u ، \dot{u} و \ddot{u} به ترتیب مقادیر جابه‌جایی، سرعت و شتاب جرم m هستند. در حالتی که به جای نیروی $p(t)$ ، سیستم یک درجه آزادی مورد بحث، تحت اثر حرکت افقی $u_g(t)$ زمین قرار گرفته باشد، در مرجع (Nigam & Jennings, 1968) ثابت شده است که معادله (۲) به شکل زیر درمی‌آید:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \quad (3)$$

که در آن u ، \dot{u} و \ddot{u} به ترتیب مقادیر جابه‌جایی نسبی، سرعت نسبی و شتاب نسبی جرم m نسبت به زمین (تکیه‌گاه) هستند و $\ddot{u}_g(t)$ نیز شتاب حرکت زمین است. شتاب حرکت زمین که به وسیله دستگاه‌های شتاب‌نگار اندازه‌گیری می‌شود معمولاً به صورت یک مجموعه اعداد می‌باشند که به فواصل زمانی مشخص Δt از یکدیگر قرار دارند. به عنوان مثال، فواصل زمانی بین نقاط شتاب‌نگاشت‌های ال‌سترو، ناغان و طیس برابر با 0.02 ثانیه می‌باشد.

روش جنینگز، روشی عددی برای حل معادله دیفرانسیل (۲) یا (۳) است. این روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تابع تحریک $p(t)$ می‌باشد که در شکل (۱) مشخص شده است. تابع تحریک $p(t)$ در بازه زمانی $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ را می‌توان به صورت یک تابع خطی بر حسب τ به شکل زیر بیان کرد:

$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad (4)$$



شکل (۱): نمادهای مورد استفاده در درون‌یابی خطی تحریک (Chopra, 2012).

که در آن $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$ می‌باشد و متغیر τ از صفر تا Δt_i تغییر می‌کند. پاسخ $u(\tau)$ سیستم یک درجه آزادی مورد بحث در بازه زمانی $0 \leq \tau \leq \Delta t_i$ حاصل جمع سه قسمت است: (۱) ارتعاش آزاد تحت جابه‌جایی اولیه u_i و سرعت اولیه \dot{u}_i در $\tau = 0$ ، (۲) پاسخ به نیروی پله‌ای p_i با شرایط اولیه صفر و (۳) پاسخ به نیروی شیب‌دار $\tau(\Delta p_i / \Delta t_i)$ با شرایط اولیه صفر با جمع پاسخ‌های سه قسمت فوق‌الذکر، پاسخ $u(\tau)$ به دست می‌آید. با جایگذاری $\tau = \Delta t_i$ در $u(\tau)$ و $\dot{u}(\tau)$ ، جابه‌جایی u_{i+1} و سرعت \dot{u}_{i+1} که به ترتیب جابه‌جایی و سرعت جرم m در زمان t_{i+1} هستند، به دست می‌آید. جزئیات کار در مرجع (Nigam & Jennings, 1968) توضیح داده شده است و در نهایت در این مرجع، معادلات بازگشتی زیر برای محاسبه u_{i+1} و \dot{u}_{i+1} ارائه شده است:

$$u_{i+1} = Au_i + B\dot{u}_i + Cp_i + Dp_{i+1} \quad (5)$$

$$\dot{u}_{i+1} = A'\dot{u}_i + B'\dot{u}_i + C'p_i + D'p_{i+1} \quad (6)$$

مقادیر هشت ضریب A, B, C, \dots, D' که در سمت راست روابط (۵) و (۶) وجود دارند، در مرجع (Nigam & Jennings, 1968) آورده شده‌اند. این ضرایب بستگی به پارامترهای ω_n ، k و ζ سیستم یک درجه آزادی دارند. همچنین، آنها وابسته به بازه زمانی $\Delta t \equiv \Delta t_i$ نیز هستند. لازم به ذکر است که $\omega_n = \sqrt{k/m}$ ، $\zeta = c/2m\omega_n$ و $\omega_D = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ می‌باشد. همچنین، در حالتی که گام زمانی $\Delta t \equiv \Delta t_i$ ثابت باشد، کافی است که هشت ضریب A, B, C, \dots, D' فقط یک‌بار محاسبه شوند.

هرگاه از درون‌یابی اسپلاین مکعبی به جای درون‌یابی خطی استفاده شود، در سمت راست معادله (۲) یا معادله (۳) یک تابع تحریک درجه سه $p(\tau)$ در بازه زمانی $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ به شکل زیر بر حسب τ وجود دارد:

$$p(\tau) = a_i \tau^3 + b_i \tau^2 + c_i \tau + d_i \quad (7)$$

در رابطه (۷)، a_i ، b_i ، c_i و d_i ضرایب ثابتی هستند که چگونگی محاسبه آنها در بخش ۳ توضیح داده شده است. حال

که ضرایب ثابت A و B با اعمال تغییر مکان و سرعت در ابتدای بازه محاسبه می‌شوند.

۳- درون‌یابی به روش اسپلاین مکعبی

روش‌های مختلفی در ریاضیات برای درون‌یابی وجود دارد که می‌توان از این روش‌ها، روش درون‌یابی خطی، روش درون‌یابی لاگرانژ و روش اسپلاین مکعبی را نام برد (Chapra & Canale, 2006; Burden & Faires, 2011). از این سه روش، روش اسپلاین مکعبی از دقت بالاتری برخوردار است (Chapra & Canale, 2006; Burden & Faires, 2011). مثالی که در ادامه کار آورده شده است می‌تواند دلیلی بر این ادعا باشد. فرض کنید ۱۱ نقطه که با نماد ستاره در شکل (۲) مشخص شده‌اند، وجود داشته باشند. فاصله افقی این نقاط از یکدیگر برابر با $0/1$ است. نمودار آبی‌رنگ، معرف 10 پاره‌خط است که این 11 نقطه را به هم وصل کرده است. نمودار قرمز رنگ، معرف نمودار چندجمله‌ای درجه دهی است که از این یازده نقطه عبور می‌کند. دقت شود که این منحنی درجه ده در نواحی ابتدایی و انتهایی دارای جهش‌هایی می‌باشد که این منحنی را از دو نمودار دیگر متمایز می‌گرداند. بالاخره، نمودار سیاه‌رنگ، معرف 10 منحنی درجه 3 اسپلاین می‌باشد که این 11 نقطه را به هم متصل می‌کنند و در نقاط داخلی، مقادیر شیب و مشتق دوم این منحنی‌ها با هم برابر می‌باشند.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = a_1\tau^3 + b_1\tau^2 + c_1\tau + d_1, \quad t_i \leq \tau \leq t_{i+1} \quad (8)$$

این معادله با فرض اینکه میرایی سیستم زیر مقدار بحرانی

باشد، یک جواب عمومی به شکل زیر دارد:

$$u_{\text{general}}(\tau) = e^{-\zeta\omega_n\tau} [A \cos \omega_D\tau + B \sin \omega_D\tau] \quad (9)$$

در رابطه (۹)، A و B دو ضریب ثابت هستند. حل مکمل یا خصوصی معادله دیفرانسیل (۸) با توجه به اینکه سمت راست این معادله یک تابع درجه سه بر حسب τ است را باید به صورت زیر در نظر گرفت:

$$u_p(\tau) = A'\tau^3 + B'\tau^2 + C'\tau + D' \quad (10)$$

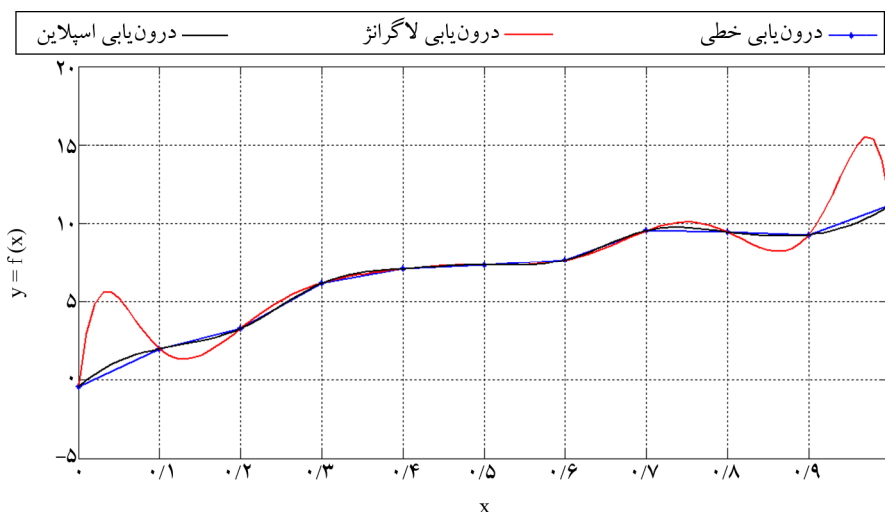
که A' ، B' و C' و D' چهار ضریب ثابت هستند که مقادیر آنها به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} A' &= a_1 / k \\ B' &= (b_1 - 3ca_1 / k) / k \\ C' &= c_1 / k - 6ma_1 / k^2 - 2c(b_1 - 3ca_1 / k) / k^2 \\ D' &= [d_1 - 2m(b_1 - 3ca_1 / k) / k] / k - c(c_1 - 6ma_1 / k - 2c(b_1 - 3ca_1 / k) / k) / k^2 \end{aligned} \quad (11)$$

با جمع جواب‌های عمومی و خصوصی معادله (۸)، جواب

کل به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u_{\text{total}}(\tau) &= u_g(\tau) + u_c(\tau) = \\ &= e^{-\zeta\omega_n\tau} [A \cos \omega_D\tau + B \sin \omega_D\tau] + \\ &= A'\tau^3 + B'\tau^2 + C'\tau + D' \end{aligned} \quad (12)$$



شکل (۲): مثالی از درون‌یابی خطی، درون‌یابی به روش لاگرانژ و درون‌یابی به روش اسپلاین مکعبی.

انتهای داده‌ها عبور کنند که اعمال این دو شرط، معادل با به دست آمدن ۲ معادله است.

(پ) مشتق اول f_i ها باید در نقاط داخلی با یکدیگر برابر باشند که اعمال این شرایط، معادل با به دست آمدن $n-1$ معادله است.
 (ت) مشتق دوم f_i ها باید در نقاط داخلی با یکدیگر برابر باشند که اعمال این شرایط، معادل با به دست آمدن $n-1$ معادله است.
 (ث) مشتق دوم اولین و آخرین از f_i ها (f_n و f_1) باید در نقطه ابتدا و انتهای داده‌ها برابر صفر باشد که اعمال این دو شرط، معادل با به دست آمدن ۲ معادله است.

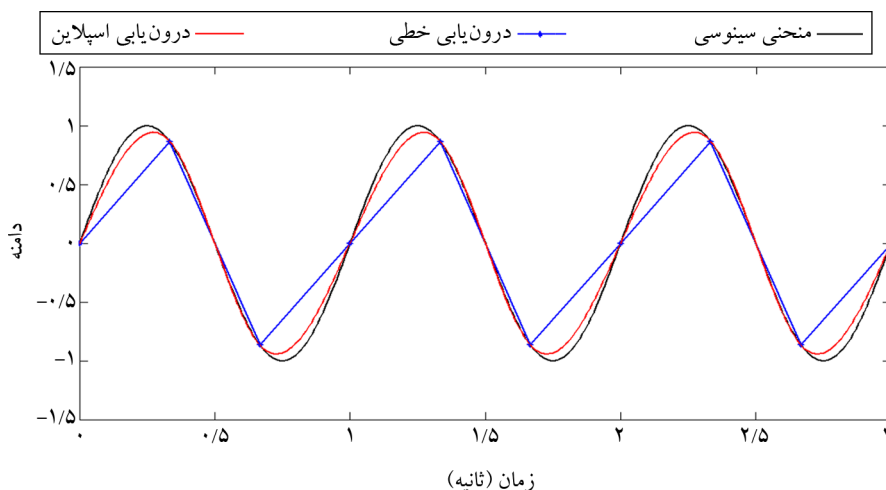
تعبیر هندسی بند ث این است که توابع اسپلاین در نقاط ابتدا و انتهای داده‌ها تبدیل به خط مستقیم می‌شوند. به عبارتی دیگر، انحناى توابع اسپلاین در نقاط ابتدا و انتهای داده‌ها برابر صفر است. به این نوع اسپلاین‌ها، اسپلاین‌های طبیعی نیز گفته می‌شود. لازم به ذکر است که در مرجع (Chapra & Canale, 2006) از اعمال بند ث، به عنوان شرایط مرزی آزاد یاد شده است. اگر در این بند، به جای مساوی قرار دادن مشتق دوم، مشتق اول برابر صفر قرار داده شود، شرایط مرزی مقید به دست می‌آید. معمولاً از شرایط مرزی آزاد استفاده می‌شود. در این تحقیق نیز از شرایط مرزی آزاد استفاده شده است. در ادامه، یک مثال از درون‌یابی به روش اسپلاین مکعبی آورده شده است. موجی سینوسی با دوره تناوب یک ثانیه و دامنه واحد را در نظر بگیرید. سه سیکل از این موج در شکل (۳) رسم شده است.

در نقاط ابتدا و انتها نیز مشتق دوم این منحنی‌ها برابر با صفر در نظر گرفته شده است. با دقت در این نمودارها مشاهده می‌شود که درون‌یابی خطی و اسپلاین همخوانی خوبی با هم در مقایسه با درون‌یابی لاگرانژ دارند. در ضمن چون در درون‌یابی اسپلاین، پیوستگی شیب و مشتق دوم در نقاط اتصال برقرار است، لذا دقت بالاتری نسبت به درون‌یابی خطی دارد (Chapra & Canale, 2006; Burden & Faires, 2011). درون‌یابی لاگرانژ نیز چون جهش‌هایی در نواحی ابتدایی و انتهایی دارد، در نتیجه، خطای زیادی در این نواحی می‌تواند داشته باشد (Chapra & Canale, 2006; Burden & Faires, 2011).

در ادامه، جزئیات مربوط به درون‌یابی اسپلاین مکعبی آورده شده است. فرض کنید که $n+1$ نقطه از داده‌ها و در نتیجه n بازه وجود داشته باشد. منظور از درون‌یابی به روش اسپلاین مکعبی این است که برای هر بازه، یک چندجمله‌ای درجه ۳ به شکل $f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ به دست آورده شود. در نتیجه، در مجموع به $4n$ معادله احتیاج است که با حل آنها ضرایب مجهول a_i ، b_i ، c_i و d_i به دست آید. این $4n$ معادله به صورت زیر به دست می‌آیند:

الف) مقادیر توابع f_i ها باید در نقاط داخلی با مقادیر داده‌ها برابر باشند که اعمال این شرایط، معادل با به دست آمدن $2n-2$ معادله است.

ب) اولین و آخرین از توابع f_i ها (f_n و f_1) باید از نقطه ابتدا و



شکل (۳): نمودار منحنی سینوسی به همراه تقریب خطی آن و نیز تقریب با تابع اسپلاین مکعبی.

محاسبه می‌شوند:

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \quad (15)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (16)$$

در این قسمت از مقاله، یک سیستم یک درجه آزاد جرم-فنر-میراگر با فرکانس یک هرتز و با نسبت میرایی ۰.۰۵، ۰.۱ و ۰.۲۰ درصد در نظر گرفته شد و به آن یک نیروی هارمونیک سینوسی با دامنه واحد و فرکانس مشخص اعمال گردید. مقدار ضریب پاسخ تغییر شکل به ازای فرکانس بار هارمونیک اعمالی (به عبارت صحیح‌تر به ازای نسبت ω/ω_n) و نسبت میرایی ζ با استفاده از رابطه (۱۵) قابل محاسبه است. سپس، بار هارمونیک سینوسی به صورت عددی و با پارامتر n شبیه‌سازی شد. n پارامتری است که تعداد تقسیمات یک سیکل از موج سینوسی را نشان می‌دهد. به عنوان مثال، در شکل (۳)، n برابر با ۳ می‌باشد؛ یعنی موج سینوسی به ۳ قسمت مساوی تقسیم شده است و همان‌طوری که از شکل مشخص است مقدار اوج منحنی سینوسی، جزء نقاط تقسیم نیست. در این تحقیق، بازه تغییرات n از ۳ تا ۱۲ در نظر گرفته شد و میزان افزایش آن واحد بود. استفاده از روش جنینگز و نیز روش درون‌یابی اسپلاین بار تحریک کننده، دامنه پایای ارتعاش جرم سیستم یک درجه آزاد محاسبه شد و با تقسیم آن بر تغییر شکل استاتیکی سیستم، $(u_{st})_0$ ، مقدار ضریب پاسخ تغییر شکل به ازای فرکانس تحریک محاسبه گردید. با تغییر فرکانس تحریک از ۰/۰۱ هرتز تا ۳ هرتز و با افزایش ۰/۰۱ هرتز، ۳۰۰ نقطه از منحنی R_d به روش درون‌یابی خطی و نیز با روش درون‌یابی اسپلاین به‌طور تقریبی محاسبه شد. با توجه به اینکه مقادیر دقیق R_d با استفاده از رابطه (۱۵) قابل محاسبه است، مقادیر بیشینه، کمینه، میانگین و انحراف معیار خطای نسبی مقادیر R_d برای این ۳۰۰ نقطه نیز قابل محاسبه است. این مقادیر برای نسبت میرایی‌های ۰.۰۲، ۰.۰۵، ۰.۱ و ۰.۲۰ درصد محاسبه شد که به عنوان نمونه برای میرایی ۰.۰۵ درصد، نتایج کار برای درون‌یابی خطی در جدول (۱) و برای درون‌یابی اسپلاین در

هر سیکل از این موج سینوسی به سه قسمت مساوی تقسیم شده است و در نتیجه، این منحنی که برابر با ۳ سیکل از موجی سینوسی با دوره تناوب یک ثانیه است با ۱۰ نقطه نشان داده شده است. با وصل کردن این ۱۰ نقطه به یکدیگر با خطوطی مستقیم، نمودار دندانه‌داری به دست می‌آید که با موج سینوسی واقعی تفاوت خیلی زیادی دارد؛ اما وقتی با منحنی‌های اسپلاین مکعبی این ۱۰ نقطه به یکدیگر متصل شوند، مشاهده می‌شود که نمودار همواری حاصل می‌گردد که تفاوت آن با موج سینوسی واقعی به مراتب کمتر است. لازم به ذکر است که منحنی‌های اسپلاین رسم شده در شکل (۳) با شرایط مرزی آزاد رسم گردیده‌اند.

روند ارتقاء روش جنینگز بدین صورت بوده است که به جای اینکه از درون‌یابی خطی استفاده شود از درون‌یابی اسپلاین مکعبی استفاده شده است؛ بدین صورت که در سمت راست معادله حاکم بر حرکت به جای اینکه یک تابع درجه یک بر حسب زمان وجود داشته باشد یک تابع درجه سه بر حسب زمان وجود دارد و حل تحلیلی این معادله دیفرانسیل با روش‌های استاندارد ریاضی که پیش‌تر شرح داده شد، امکان‌پذیر است. البته محاسبه ضرایب این معادله درجه سه با استفاده از تمام نقاط شتاب‌نگاشت امکان‌پذیر است در حالی که در درون‌یابی خطی تنها به نقاط ابتدا و انتهای بازه احتیاج داریم.

۴- محاسبه ضریب پاسخ تغییر شکل سیستم یک درجه آزاد به صورت عددی

معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم یک درجه آزاد خطی جرم-فنر-میراگر به نیروی سینوسی هارمونیک عبارت است از:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \omega t \quad (13)$$

که p_0 دامنه نیروی سینوسی می‌باشد. در مرجع

$$u(t) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \phi) \quad (14)$$

که در آن، $(u_{st})_0 = p_0 / k$ برابر با تغییر شکل استاتیکی سیستم است. R_d و ϕ نیز به ترتیب ضریب پاسخ تغییر شکل و زاویه فاز (تأخیر فاز) می‌باشند که با استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶)

نامیرای سیستم (ω/ω_n) می‌باشد. با دقت در شکل (۴) و نیز با مراجعه به جداول (۱) و (۲) مشاهده می‌شود که بیشینه خطای نسبی مربوط به روش جینگز و درون‌یابی اسپلاین به ترتیب $۵۴/۷۷$ و $۱۱/۸۲$ درصد می‌باشد. همچنین، کمینه خطای نسبی مربوط به روش جینگز و درون‌یابی اسپلاین به ترتیب $۷۱/۹۰$ و $۳۲/۴۲$ درصد است. میانگین خطای نسبی مربوط به روش جینگز و درون‌یابی اسپلاین برای میرایی ۵ درصد و تعداد تقسیمات ۳ به ترتیب برابر با $۳۱/۹۵$ و $۱۱/۳۴$ درصد است.

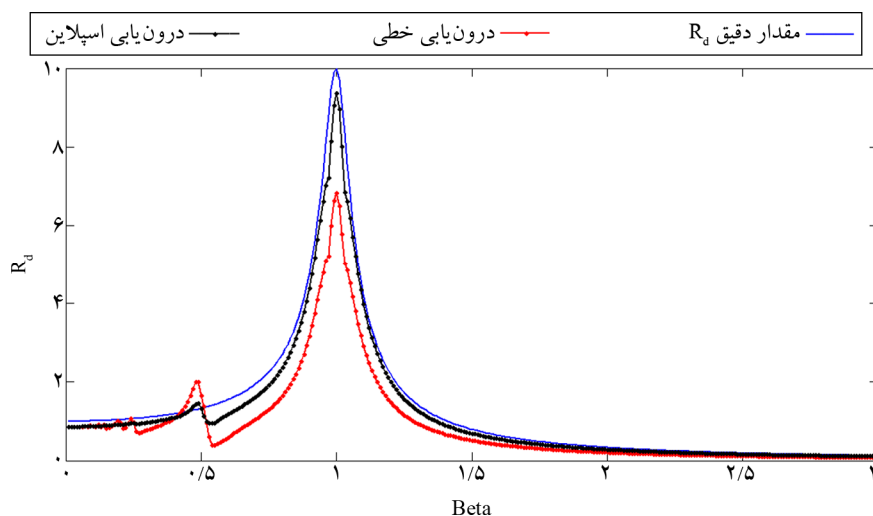
جدول (۲) آورده شده است. این کارها با برنامه‌نویسی در محیط MATLAB (Hanselman & Littlefield, 1996) انجام شد. همچنین، در شکل (۴) نمودار تقریبی R_d محاسبه شده به روش درون‌یابی خطی تحریک و نیز با روش درون‌یابی اسپلاین تحریک به همراه نمودار دقیق R_d برای نسبت میرایی ۵ درصد و به ازای پارامتر n برابر با مقدار ۳ رسم گردیده‌اند. لازم به ذکر است منظور از β که در جداول (۱) الی (۲) و نیز در شکل (۴) از آن نام برده شده است، نسبت فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی

جدول (۱): مقادیر بیشینه، کمینه، میانگین و انحراف معیار خطای نسبی R_d برای میرایی ۵ درصد برای روش جینگز.

تعداد تقسیمات	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
بیشینه خطای نسبی (%)	۵۴/۷۷	۱۹/۸۳	۱۴/۹۵	۰/۶۰	۴/۷۵	۳/۰۳	۱/۵۰	-۱/۲۶	۲/۶۳	۲/۰۲
بنا مربوط به خطای بیشینه	۰/۴۸	۰/۳۲	۰/۲۴	۰/۱۹	۰/۱۲	۰/۱۰	۰/۰۹	۰/۰۹	۰/۰۸	۰/۰۷
کمینه خطای نسبی (%)	-۷۱/۹۰	-۵۸/۵۲	-۳۵/۳۹	-۳۱/۳۵	-۱۹/۶۳	-۱۵/۶۳	-۱۲/۴۵	-۱۳/۲۵	-۸/۱۲	-۶/۱۵
بنا مربوط به خطای کمینه	۰/۵۴	۰/۳۵	۰/۲۷	۰/۲۲	۰/۱۸	۰/۱۵	۰/۱۳	۰/۱۲	۰/۱۱	۰/۱۰
میانگین خطای نسبی (%)	-۳۱/۹۵	-۱۹/۰۴	-۱۴/۲۵	-۱۶/۷۲	-۷/۵۲	-۵/۷۸	-۴/۵۵	-۵/۸۴	-۳/۰۲	-۲/۷۹
انحراف معیار خطای نسبی (%)	۱۴/۸۰	۸/۸۸	۴/۵۳	۳/۸۵	۱/۹۸	۲/۰۲	۱/۱۰	۱/۳۹	۰/۶۷	۰/۸۹

جدول (۲): مقادیر بیشینه، کمینه، میانگین و انحراف معیار خطای نسبی R_d برای میرایی ۵ درصد برای درون‌یابی اسپلاین.

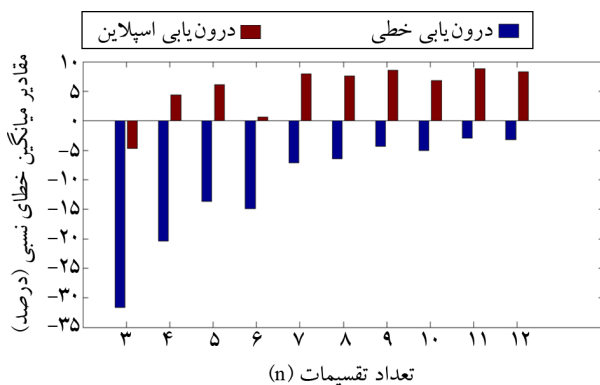
تعداد تقسیمات	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
بیشینه خطای نسبی (%)	۱۱/۸۲	۱۰/۵۵	۶/۷۰	۰/۶۹	۹/۱۵	۱۱/۱۵	۱۰/۰۵	۶/۷۵	۱۰/۴۷	۱۱/۱۱
بنا مربوط به خطای بیشینه	۰/۴۸	۳/۰۰	۳/۰۰	۱/۰۹	۳/۰۰	۳/۰۰	۳/۰۰	۳/۰۰	۳/۰۰	۳/۰۰
کمینه خطای نسبی (%)	-۳۲/۴۲	-۲۹/۳۱	-۶/۸۸	-۱۳/۵۵	-۲/۶۷	-۷/۷۰	-۱/۶۲	-۴/۸۶	-۱/۰۵	-۳/۴۸
بنا مربوط به خطای کمینه	۰/۵۴	۰/۹۵	۰/۲۶	۰/۲۱	۰/۹۰	۰/۹۸	۰/۸۷	۰/۰۱	۰/۹۶	۰/۸۳
میانگین خطای نسبی (%)	-۱۱/۳۴	-۰/۴۸	-۰/۸۳	-۷/۱۱	۱/۱۱	۱/۵۶	۱/۷۷	-۰/۴۱	۲/۰۶	۱/۹۲
انحراف معیار خطای نسبی (%)	۴/۸۲	۶/۱۰	۲/۷۰	۳/۳۰	۲/۸۱	۳/۸۱	۲/۹۰	۲/۶۲	۲/۹۵	۳/۳۸



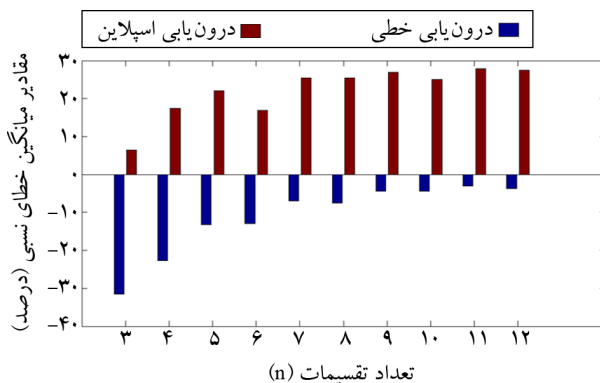
شکل (۴): نمودارهای مقادیر دقیق و تقریبی ضریب پاسخ تغییر شکل برای میرایی ۵ درصد و تعداد تقسیمات ۳ با استفاده از روش جینگز و درون‌یابی اسپلاین.

می‌گردد که مقادیر میانگین خطای نسبی برای روش جینگز و نیز درون‌یابی اسپلاین به ازای تمام n ها منفی است، فقط دو مورد استثناء وجود دارد، بدین صورت که مقدار میانگین خطا در روش اسپلاین به ازای n مساوی با ۸ و ۱۲ به مقدار ناچیزی مثبت شده است.

با دقت در شکل (۶) مشخص می‌گردد که برای میرایی ۵ درصد، مقادیر قدر مطلق میانگین خطای نسبی روش اسپلاین به ازای تمام n ها کمتر از مقادیر متناظر خطای به‌دست‌آمده از روش جینگز است. همچنین، با دقت در این شکل و نیز جداول (۱) و (۲) مشخص می‌شود که مقادیر میانگین خطای نسبی برای روش جینگز به ازای تمام n ها منفی است، اما مقادیر میانگین خطای نسبی برای درون‌یابی اسپلاین به ازای n مساوی ۳، ۴، ۵، ۶ و ۱۰ منفی بوده و برای سایر موارد مثبت است.



شکل (۷): نمودار میله‌ای میانگین خطای نسبی R_d بر حسب درصد برای میرایی ۱۰ درصد به ازای تعداد تقسیمات مختلف n برای روش جینگز و درون‌یابی اسپلاین.

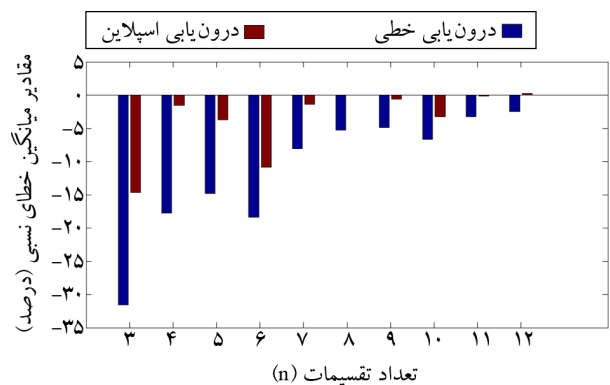


شکل (۸): نمودار میله‌ای میانگین خطای نسبی R_d بر حسب درصد برای میرایی ۲۰ درصد به ازای تعداد تقسیمات مختلف n برای روش جینگز و درون‌یابی اسپلاین.

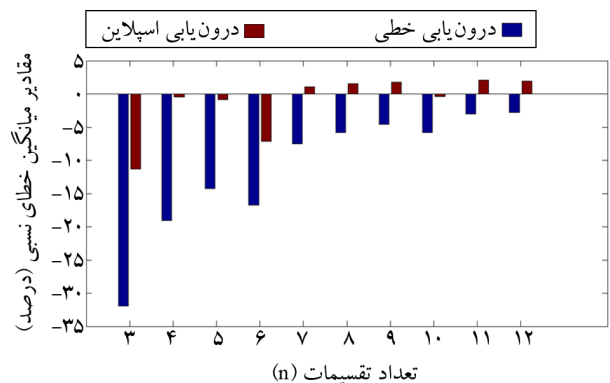
بدین ترتیب، مشاهده می‌شود برای میرایی ۵ درصد که یک میرایی متعارف می‌باشد و توسط آئین‌نامه‌های لرزه‌ای برای تحلیل دینامیکی خطی سازه‌ها توصیه شده است، برای تعداد تقسیمات ۳، مقادیر قدر مطلق بیشینه، کمینه و میانگین خطای نسبی درون‌یابی اسپلاین کمتر از روش جینگز می‌باشد.

در شکل‌های (۵) الی (۸)، نمودار میله‌ای مقادیر میانگین خطای نسبی روش جینگز و روش درون‌یابی اسپلاین بر حسب n های مختلف به ترتیب برای میرایی‌های ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد رسم گردیده است.

با دقت در شکل (۵) مشاهده می‌شود که برای میرایی ۲ درصد، مقادیر قدر مطلق میانگین خطای نسبی روش اسپلاین به ازای تمام n ها کمتر از مقادیر متناظر خطای به‌دست‌آمده از روش جینگز است. همچنین، با دقت در این شکل مشخص



شکل (۵): نمودار میله‌ای میانگین خطای نسبی R_d بر حسب درصد برای میرایی ۲ درصد به ازای تعداد تقسیمات مختلف n برای روش جینگز و درون‌یابی اسپلاین.



شکل (۶): نمودار میله‌ای میانگین خطای نسبی R_d بر حسب درصد برای میرایی ۵ درصد به ازای تعداد تقسیمات مختلف n برای روش جینگز و درون‌یابی اسپلاین.

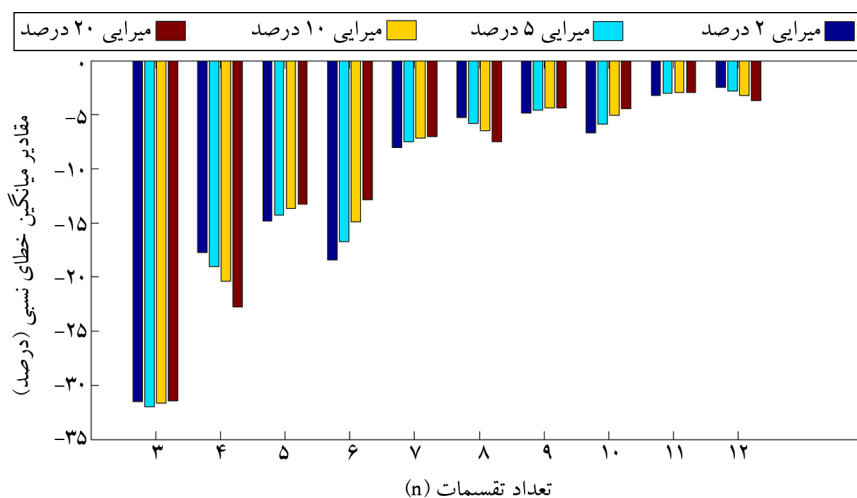
است و برای سایر حالات، روش جنینگر با توجه به سادگی آن دارای برتری می‌باشد.

در شکل (۹) نمودار میله‌ای مقادیر میانگین خطای نسبی روش جنینگر بر حسب پارامتر n و نسبت میرایی β رسم گردیده است. با دقت در نمودار میله‌ای رسم شده در این شکل، مشاهده می‌شود که به ازای تمام مقادیر n و β میانگین خطا منفی می‌باشد. همچنین، مشاهده می‌شود با افزایش مقدار n به ازای یک نسبت میرایی مشخص β ، عموماً مقدار خطا کاهش می‌یابد هر چند موارد نقضی نیز وجود دارد. در آخر می‌توان گفت که برای یک n مشخص، مقدار خطا خیلی حساس به میزان میرایی نیست، هر چند به نظر می‌آید برای n های زوج حساسیت خطا نسبت به مقدار میرایی بیشتر از n های فرد است.

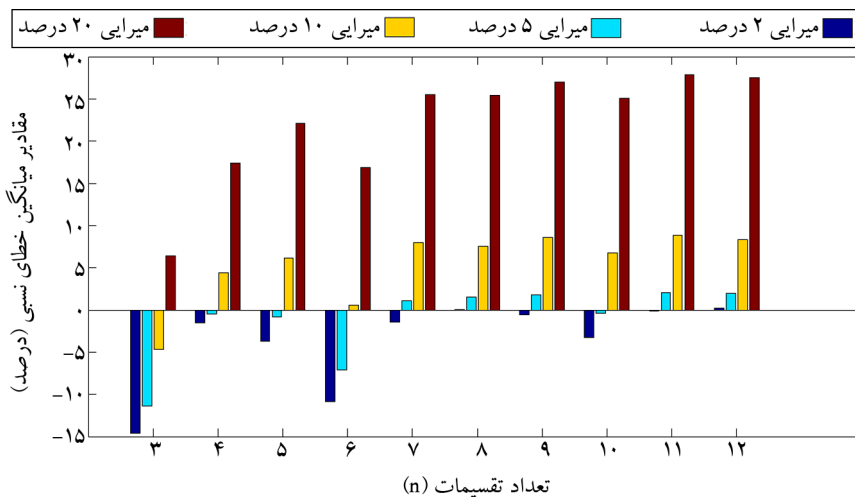
در شکل (۱۰) نمودار میله‌ای مقادیر میانگین خطای نسبی روش درون‌یابی اسپلاین بر حسب پارامتر n و نسبت میرایی β رسم گردیده است. با دقت در نمودار میله‌ای رسم شده در این شکل، مشاهده می‌شود که بر خلاف روش جنینگر، دیگر به ازای تمام مقادیر n و β میانگین خطا منفی نیست. در حقیقت، مقدار خطا به ازای بعضی از مقادیر n و β مثبت و به ازای بعضی از مقادیر n و β منفی می‌باشد. همچنین، مقدار قدر مطلق کمینه خطا کوچک‌تر از بیشینه خطا است. از ۴۰ مقدار خطای رسم شده در شکل (۱۰)، قدر مطلق ۲۸ خطا زیر ۱۰ درصد است.

با دقت در شکل (۷) مشاهده می‌شود که برای میرایی ۱۰ درصد، دیگر مقادیر قدر مطلق میانگین خطای نسبی روش اسپلاین به ازای تمام n ها کمتر از مقادیر متناظر خطای به دست آمده از روش جنینگر نیست. در حقیقت، به ازای n مساوی ۳، ۴، ۵ و ۶ قدر مطلق میانگین خطای روش اسپلاین از مقادیر متناظر خطای روش جنینگر کمتر است و در سایر حالات عکس این مطلب صادق است. همچنین، با دقت در این شکل مشخص می‌گردد که مقادیر میانگین خطای نسبی برای روش جنینگر به ازای تمام n ها منفی می‌باشد، اما مقدار میانگین خطای نسبی برای درون‌یابی اسپلاین فقط به ازای n مساوی ۳ منفی است و برای سایر حالات مثبت می‌باشد.

با دقت در شکل (۸) ملاحظه می‌شود که برای میرایی ۲۰ درصد، فقط به ازای n مساوی ۳ و ۴ مقادیر قدر مطلق میانگین خطای نسبی روش اسپلاین کمتر از مقادیر متناظر خطای روش جنینگر است و در هشت حالت دیگر عکس این مطلب صادق می‌گردد. همچنین، با دقت در این شکل مشخص می‌گردد که مقادیر میانگین خطای نسبی برای روش جنینگر به ازای تمام n ها منفی می‌باشد، اما مقدار میانگین خطای نسبی برای درون‌یابی اسپلاین به ازای تمام n ها مثبت است. در مجموع می‌توان گفت روش درون‌یابی اسپلاین برای حالاتی که تعداد تقسیمات و میرایی کم باشد دارای برتری نسبت به روش جنینگر



شکل (۹): نمودار میله‌ای میانگین خطای نسبی R_H بر حسب درصد برای میرایی‌های ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ازای تعداد تقسیمات مختلف n برای روش جنینگر.



شکل (۱۰): نمودار میله‌ای میانگین خطای نسبی R_n بر حسب درصد برای میرایی‌های ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ازای تعداد تقسیمات مختلف n برای روش درون‌یابی اسپلاین.

توسط آئین‌نامه‌های لرزه‌ای مقدار نسبتاً کمی (۵ درصد) می‌باشد، لذا پیشنهاد می‌گردد در مطالعات تکمیلی، از روش درون‌یابی اسپلاین برای محاسبه پاسخ لرزه‌ای سیستم‌های چند درجه آزاد استفاده شود و نتایج کار با حالتی که پاسخ این سیستم‌ها از روش جینگز به دست آمده است، مقایسه شود.

ذکر این نکته ضروری است که زمان اجرای برنامه کامپیوتری مربوط به روش درون‌یابی اسپلاین مکعبی نسبت به روش جینگز بیشتر است؛ زیرا در روش درون‌یابی اسپلاین، لازم است دستگاه معادلات خطی‌ای با تعداد مجهولاتی برابر با ۴ برابر تعداد بازه‌ها حل گردد، درحالی‌که در روش درون‌یابی خطی تحریک اصلاً نیاز نیست که دستگاه معادله‌ای حل گردد و صرفاً با داشتن سرعت و تغییر مکان در ابتدای گام و با فرض خطی بودن تحریک در طول گام زمانی مورد نظر، ضرایب A، B، C، D، A'، B'، C'، D' محاسبه گردیده و با استفاده از این هشت ضریب، سرعت و تغییر مکان انتهای گام زمانی به دست می‌آید. لازم به ذکر است اگر فاصله زمانی بین نقاط مختلف شتاب‌نگاشت ثابت باشد، کافی است که ضرایب A، B، C، D، A'، B'، C'، D' فقط یک‌بار محاسبه شوند.

مراجع

Burden, R.L., & Faires, J.D. (2011). *Numerical Analysis*. Ninth Edition, Books/Cole.

این عدد برای شکل (۹)، عدد ۲۴ می‌باشد؛ یعنی قدر مطلق ۲۴ خطا از ۴۰ خطای رسم شده در شکل (۹) زیر ۱۰ درصد است که این موضوع برتری نسبی روش اسپلاین را نسبت به روش جینگز نشان می‌دهد. برخلاف روش جینگز، مشاهده می‌شود با افزایش مقدار n به ازای یک مقدار میرایی مشخص، عموماً مقدار قدر مطلق خطا کاهش نمی‌یابد، بلکه بعضاً به صورت نوسانی کم و زیاد می‌گردد. به عنوان نکته آخر می‌توان گفت که برای یک n مشخص، مقدار خطا شدیداً حساس به میزان میرایی است، به طوری که با افزایش میرایی، علامت خطا می‌تواند تغییر کند و مقدار آن می‌تواند برای n های بزرگ به شدت زیاد شود.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این تحقیق، با استفاده از درون‌یابی اسپلاین مکعبی، روش جینگز که مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک است، ارتقاء داده شد. برای بررسی میزان دقت این روش، ضریب پاسخ نیروی هارمونیک تغییر شکل یک سیستم خطی یک درجه آزاد میرا با این روش و نیز با روش جینگز محاسبه شد و مقادیر به دست آمده از این دو روش با مقادیر دقیق متناظرشان مقایسه شد. نتایج کار حاکی از آن بود که استفاده از این روش نسبت به روش جینگز وقتی که تعداد تقسیمات و میزان میرایی کم باشد، منجر به نتایج دقیق‌تری می‌شود. با توجه به اینکه مقدار میرایی توصیه شده

- Applied Mathematics and Computation*, 175(2), 1235-1244.
- Maleknejad, K., & Derili, H. (2007). Numerical solution of Hammerstein integral equations by using combination of spline-collocation method and Lagrange interpolation. *Applied Mathematics and Computation*, 190(2), 1557-1562.
- Mohammadi Nia, M., Shojaee, S., & Hamzehei-Javaran, S. (2020). A mixed formulation of b-spline and a new class of spherical hankel shape functions for modeling elastostatic problems. *Applied Mathematical Modelling*, 77, 602-616.
- Motaref, S. (2006). *Probabilistic Study of the Influence of Column-to-Beam Resistance Ratio Parameter on the Seismic Performance of Concrete Frames*. Civil Engineering-Earthquake Engineering M.Sc. Thesis, International Institute of Earthquake Engineering and Seismology, Tehran (in Persian).
- Naeim, F. (1996) *Response of Instrumented Buildings to 1994 Northridge Earthquake*. Draft Report CSMIP.
- Nigam, N.C., & Jennings, P.C. (1968). *Digital Calculation of Response Spectra from Strong-Motion Records*. California Institute of Technology, Earthquake Engineering Research Laboratory.
- Nigam, N.C., & Jennings, P.C. (1969). Calculation of response spectra from strong-motion earthquake records. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 59(2), 909-922.
- Rostami, S., & Shojaee, S. (2017). A family of cubic b-spline direct integration algorithms with controllable numerical dissipation and dispersion for structural dynamics. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, 42, 17-32.
- Rostami, S., & Shojaee, S. (2019). Development of a direct integration method on quartic b-spline collocation method. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, 43, 615-636.
- Saffari, H., Shojaee, S., Rostami, S., & Maleknejad, M. (2014). Application of cubic spline on large deformation analysis of structures. *International Journal of Steel Structures*, 14(1), 165-172.
- Chapra, S.C., & Canale, R.P. (2006). *Numerical Methods for Engineers*. Fifth Edition, McGraw-Hill, New York.
- Chopra, A.K. (2012). *Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Fourth Edition, Prentice-Hall.
- Esmailabadi, R., Bahar, A., & Azimi-Nejad, A. (2015). Presentation of new relationships of hysteresis damping capacity of steel bending frames at the level of life safety performance required by direct design based on displacement. *Scientific Research Quarterly of Earthquake Science and Engineering*, 3(4), 43-59 (in Persian).
- Ghazanfari, S., Hamzehei-Javaran, S., Alesadi A., & Shojaee, S. (2019). Free vibration analysis of cross-ply laminated beam structures using refined beam theories and B-Spline Basis Functions. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 467-475.
- Hanselman, D., & Littlefield, B. (1996). *Mastering MATLAB, A Comprehensive Tutorial and Reference*. First Edition, Prentice-Hall.
- Hoseini Hashemi, B., Hoseini, M., & Khanlari, K. (2002). Effect of P-delta on dynamic analysis of structures, second order analysis of structures under dynamic loads. *Journal of Seismology and Earthquake Engineering*, 4(4), 2-10 (in Persian).
- Izadinia, M., & Jamshidi, J. (2016). Controlling the dynamic vibration of adjacent structures by establishing a connection. *Second International on Geotechnics and Seismic Engineering*, Tabriz, Iran (in Persian).
- Liu, Z.W., Chen, R.S., & Chen, J.Q. (2008). Adaptive sampling cubic-spline interpolation method for efficient calculation of monostatic RCS. *Microwave and Optical Technology Letters*, 50(3), 751-755.
- Mahdavi, S.H., Razak, H.A., Shojaee, S., & Mahdavi, M.S. (2015). A comparative study on application of chebyshev and spline methods for geometrically non-linear analysis of truss structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 101-102, 241-251.
- Maleknejad, K., & Derili, H. (2006). Numerical solution of integral equations by using combination of spline-collocation method and Lagrange interpolation.

فهرست علائم

- m : جرم سیستمیک درجه آزاد
 n : تعداد بازه‌ها، تعداد تقسیمات یک سیکل از منحنی سینوسی
 c : ضریب میرایی
 k : ضریب سختی فنر
 u : جابه‌جایی مطلق یا نسبی جرم سیستم یک درجه آزاد
 \dot{u} : سرعت مطلق یا نسبی جرم سیستم یک درجه آزاد
 \ddot{u} : شتاب مطلق یا نسبی جرم سیستم یک درجه آزاد
 t, τ : متغیر زمان
 $p(t)$: نیروی تحریک کننده سیستم یک درجه آزاد
 p_0 : دامنه نیروی تحریک کننده سینوسی
 $u_g(t)$: جابه‌جایی افقی زمین در هنگام زلزله
 $\ddot{u}_g(t)$: شتاب افقی زمین در هنگام زلزله
 ω : فرکانس زاویه‌ای بار سینوسی
 ω_n : فرکانس زاویه‌ای طبیعی نامیرای سیستم یک درجه آزاد
 T_n : دوره تناوب ارتعاش طبیعی نامیرای سیستم یک درجه آزاد
 ω_D : فرکانس زاویه‌ای طبیعی میرای سیستم یک درجه آزاد
 ζ : نسبت میرایی سیستم یک درجه آزاد
 $\Delta t, \Delta t_i$: گام زمانی

Shafiee-fard, M.R. (2019). *Second-Order Analysis of Structures under Dynamic Loads by Jennings Numerical Method*, Publisher: Moalefine Talaei (in Persian).

Shahmorad, S., & Abdollahi, A. (2007). A Quadrature free convergent method for the numerical solution of linear fredholm integral equations based on hermite-spline interpolation. *Proceeding in Applied Mathematics and Mechanics*, 7(1), 41-42.

Shojaee, S., Rostami, S., & Abbasi, A. (2015). An unconditionally stable implicit time integration algorithm: modified quartic b-spline method. *Computers and Structures*, 153, 98-111.

Vamvatsikos, D., & Cornell, C.A. (2004). Applied incremental dynamic analysis. *EarthquakeSpectra*, 20(2), 523-553.

Yu, R., Wang, R. & Zhu, C. (2013). A numerical method for solving KdV equation with multilevel bspline quasi-interpolation. *Applicable Analysis*, 92(8), 1682-1690.

Zhernakov, V.S., Pavlov, V.P., & Kudoyarova, V.M. (2017). The enhanced spline-method for numerical results of natural frequencies of beams. *Procedia Engineering*, 176, 438-450.

Improvement of the Linear Interpolation Method of Excitation Using the Spline Interpolation Function to Numerically Calculate the Response Coefficient of Linear One-Degree-Of-Freedom Systems

Masoud Mahmoodabadi^{1*}, Babak Taghavi², MohammadReza Hasani³
and MohammadJavad Hosseiny⁴

1. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran, *Corresponding Author, email: m.mahmoodabadi@qom.ac.ir
2. Ph.D. Candidate, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran
3. Ph.D. Candidate, Department of Civil Engineering, Noshirvani University of Technology, Babol, Iran
4. M.Sc. Student, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran

In this article, the Jennings method has been improved by using the third-order spline interpolation function. In this research, in order to be able to compare the advantages and disadvantages of the Jennings method, which is based on exact relationships and the assumption of linear changes of the excitation, compared to the spline interpolation method, a damped one-degree-of-freedom linear system under sinusoidal harmonic loading is considered has been taken. Exact values of the deformation response coefficient of this system are available for different excitation frequencies. The approximate values of the deformation response coefficient of this system for different excitation frequencies were calculated assuming linear interpolation of excitation and also assuming interpolation with spline function and were compared with their exact corresponding values. This work was done for two, five, ten and twenty percent damping. The results of the work indicated that when the number of points by which the sine wave is approximated is small and also the amount of damping is low, the interpolation with the spline function has a significantly higher accuracy than the linear interpolation mode. Another noteworthy point is the high sensitivity of the cubic spline interpolation to the level of system damping, so that for a certain number of divisions, the error value is highly sensitive to the damping value. Thus, with the increase of damping, the sign of the error changes and its value increases strongly for the number of large divisions. This phenomenon is not seen at all in linear interpolation.

Therefore, considering that in interpolation using the spline method, the continuity of the slope and the second derivative are maintained in the internal points, it is suggested to use this method to calculate the dynamic response of linear systems and the results obtained with the results of Jennings' method should be compared and appropriate decisions should be made if there is a significant difference in the analysis results obtained from these two methods.

It is important to mention that the execution time of the computer program related to the cubic spline interpolation method is longer than the Jennings method. Because in the spline interpolation method, it is necessary to solve the system of linear equations with the number of unknowns equal to four times the number of intervals, while in the excitation linear interpolation method, it is not necessary to solve the system of equations at all and simply by having the velocity and displacement at the beginning of the step and assuming that the excitation is linear during the desired time step, the coefficients $A, B, C, D, A', B', C', D'$ were calculated and using this eight coefficient, velocity and displacement at the end of the time step are obtained. It should be noted that if the time interval between different accelerogram points is constant, it is sufficient that the coefficients $A, B, C, D, A', B', C', D'$ are calculated only once.

Keywords: Jennings Method, Cubic Spline Function, Linear Dynamic Systems, Harmonic Excitation, Harmonic Force Deformation Response Coefficient.