

چکیده

یکی از مدل‌های تصادفی که در تحلیل زمین‌لرزه‌ها در نظر گرفته می‌شود، مدل تصادفی نامانا متشکل از فرآیندهای سیگما نوسانی^۱ است که با در نظر گرفتن شدت و فرکانس وابسته به زمان زمین‌لرزه‌ها، به مدل‌بندی آن‌ها می‌پردازد. در این مقاله راهکاری ارائه می‌دهیم که به کمک تعیین تعداد توابع موج کروی کشیده شده گسسته که یکی از مهم‌ترین موارد در تحلیل ارزیابی عملکرد لرزه‌ای سازه‌ها است و استفاده از آن‌ها در ساختار مدل، بتوان برآورد تابع چگالی طیفی توان را به صورت دقیق‌تری به دست آورد. در این راستا از تصویر کردن سری زمانی زمین‌لرزه‌ها بر روی توابع موج کروی کشیده شده گسسته و استفاده از روش برآورد طیف پنجره چندگانه کوتاه‌مدت تامسون^۲ برآورد تابع چگالی طیفی توان به دست می‌آید. سپس پارامترهای چگالی طیف توان وابسته به زمان این مدل تصادفی، توسط روش کمترین مربعات^۳ خطا برآورد می‌شوند. با توجه به نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی می‌توان مشاهده کرد، با تعیین تعداد بهینه توابع موج کروی کشیده شده گسسته، مدل به خوبی تغییرات مربوط به زمان و فرکانس را در زمین‌لرزه‌های واقعی ثبت می‌کند. روش مذکور بر روی داده‌های زمین‌لرزه‌ای ال سنتر و^۴ ۱۹۴۰ و داده‌های زمین‌لرزه‌ی بم^۵ ۲۰۰۳ به کار برده شده و نتایج ارائه شده‌اند.

واژگان کلیدی: توابع موج کروی کشیده شده گسسته، برآورد طیف پنجره چندگانه زمان کوتاه تامسون، فرآیندهای سیگما نوسانی، طیف توان.

نوع مقاله: یادداشت پژوهشی

راهکاری جهت تعیین تعداد بهینه توابع موج کروی کشیده شده گسسته در مدل تصادفی نامانای زمین‌لرزه‌ها

مارال کرباسچی

دانش‌آموخته کارشناسی ارشد آمار ریاضی، گروه آمار، دانشگاه الزهراء، تهران، ایران

یاسمن ملکی یورتچی (نویسنده مسؤل)

پژوهشگر مؤسسه تحقیقات دریایی نروژ، برگن، نروژ و استادیار، گروه آمار، دانشگاه الزهراء، تهران، ایران، yasaman.maleki@hi.no

زکریا واعظی

استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

۱- مقدمه

است. لذا جهت سادگی محاسبات، نامانایی فرکانس در تجزیه و تحلیل ارتعاشات تصادفی، نادیده گرفته می‌شود؛ اما مطالعات اخیر نشان داده است که این نامانایی، تأثیر بسزایی در پاسخ ساختارهای خطی و غیرخطی داشته است (Yeh & Wen, 1990). تجزیه و تحلیل طیف تحولی برای اولین بار توسط پریستلی^۶ معرفی شده است. اگرچه ثابت شده که این رویکرد به طور گسترده قابل استفاده است، اما محدودیت‌هایی نیز دارد. راه کاری برای رهایی از این محدودیت‌ها توسط باتاگلیا^۷ به این صورت ارائه شده است که برای این نوع فرآیندها (تجزیه و تحلیل زمان-فرکانس با پارامتر فرکانس) فرآیندهای سیگما نوسانی را معرفی و سپس تجزیه و تحلیل طیف تحولی را مطرح می‌کند (Battaglia, 1979).

در بررسی مسائل موجود در مهندسی زلزله، انواع مختلفی از مدل‌های تصادفی مانا و نامانا طی سال‌های گذشته، گسترش پیدا کرده و در تحلیل‌ها به کار گرفته شده‌اند (Shinozuka & Deodatis, 1988). در رکورد زمین‌لرزه‌ها، محتوای فرکانسی وابسته به زمان وجود دارد که این فرکانس نامانا به فاصله‌ی کانونی بستگی دارد. به دلیل اینکه زمان رسیدن امواج P (اولیه یا فشار)، S (ثانویه یا برشی) متفاوت است و امواج سطحی با سرعت‌های مختلفی از طریق پوسته‌ی زمین منتشر می‌شوند. این سه نوع موج اولیه، ثانویه و امواج سطحی به طور قابل توجهی محتوای فرکانسی متفاوتی دارند.

در اغلب مدل‌های مربوط به زمین‌لرزه‌ها، اعتقاد بر این بوده که تغییرات فرکانس طی زمان، تأثیر قابل توجهی بر پاسخ نداشته

(Priestly, 1981):

$$X_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k(t, \omega) e^{i\omega t} dZ_k(\omega) \quad (2)$$

که در آن $i = \sqrt{-1}$ ؛ $A_k(t, \omega)$ تابع مدولاسیون زمان-فرکانس تعینی^۱ (غیر تصادفی) است، و $[dZ_k(\omega)]$ فرآیندی دارای نمودارهای متعامد و دو به دو مستقل است و داریم:

$$E[Z_k(\omega)] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (3)$$

$$E[dZ_i^*(\omega_1) dZ_k(\omega_2)] = \delta(i-k) \delta(\omega_1 - \omega_2) \Phi_{Z_k Z_k} d\omega_1 d\omega_2 \quad (4)$$

که E امید ریاضی و $\delta(\cdot)$ تابع دلتای دیراک است.

نمایش طیفی در رابطه (۲) می‌تواند به‌عنوان حد مجموع امواج سینوسی با فرکانس‌های افزایشی و دامنه تصادفی وابسته به زمان $A_k(t, \omega)[dZ_k(\omega)]$ تفسیر شود.

۲-۲- فرآیند سیگما نوسانی

فرآیند سیگما نوسانی، به‌صورت مجموع تعداد متناهی از فرآیندهای نوسانی که نمایش طیفی رابطه (۲) را می‌پذیرند، تعریف می‌شود:

$$Y(t) = \sum_{k=1}^p X_k(t) \quad (5)$$

که در آن فرآیندهای نوسانی $X_k(t), k = 1, 2, \dots, p$ ، دو به دو مستقل هستند.

هر فرآیند نوسانی $X_k(t)$ که عضوی از فرآیند سیگما نوسانی $Y(t)$ است، دارای طیف توان نوسانی به‌صورت زیر است:

$$\Phi_{X_k X_k}(t, \omega) = |A_k(t, \omega)|^2 \Phi_{Z_k Z_k}(\omega) \quad (6)$$

که از روابط زیر به دست آمده است:

$$E(X_j^*(t) X_k(t)) = E \left(\int_{-\infty}^{\infty} A_j^*(t, \omega_1) e^{-i\omega_1 t} dZ_j^*(\omega_1) \int_{-\infty}^{\infty} A_k(t, \omega_2) e^{i\omega_2 t} dZ_k(\omega_2) \right) = \quad (7)$$

$$\iint A_j^*(t, \omega_1) A_k(t, \omega_2) e^{-i\omega_1 t + i\omega_2 t} E(dZ_j^*(\omega_1) dZ_k(\omega_2)) = |A_k(t, \omega)|^2 \Phi_{Z_k Z_k}(\omega)$$

در این مقاله، به برآورد تابع چگالی طیفی توان، در مدل تصادفی نامانا از خانواده فرآیندهای سیگما نوسانی، می‌پردازیم. در این راستا از توابع موج کروی کشیده شده گسسته (DPSS)^۲، استفاده می‌کنیم و با تعیین تعداد بهینه DPSSها، برآورد دقیقی از تابع چگالی طیفی توان (PSD)^۳ ارائه می‌دهیم. مدل مذکور برای داده‌های زمین‌لرزه‌های ال‌سترو ۱۹۴۰ و بسم ۲۰۰۳ به کار برده شده است. پارامترهای مدل توسط روش برازش تطبیقی به نحوی برآورد می‌شوند که تابع کمترین مربعات خطای چگالی طیف توان PSD مدل، حداقل مقدار خود را بگیرد. در برآورد طیف از روش پنجره چندگانه کوتاه‌مدت تامسون، کمک می‌گیریم. نکته قابل توجه در مدل به کار گرفته شده، این است که مدل مذکور، تغییرات زمان و فرکانس را در رکوردهای زمین‌لرزه‌ها ثبت می‌کند که این روش از نظر محاسباتی کارآمد هستند و به راحتی می‌توان آنها را به موارد مختلف تعمیم داد (Vlachos et al., 2016).

در ابتدا و پیش از طرح مسائل نظری، لازم است برخی از تعاریف مقدماتی را بیان کنیم. سپس در بخش ۳ به بررسی توابع DPSS می‌پردازیم؛ و در ادامه، در بخش ۴ با ارائه راهکاری جهت تعیین تعداد DPSSها، نتایج روش مذکور را در داده‌های شبیه‌سازی شده بررسی خواهیم کرد. در نهایت، مدل مذکور و روش برآورد طیف بر روی داده‌های واقعی ال‌سترو سال ۱۹۴۰ به کار برده خواهد شد.

۲-۲- مدل تصادفی نامانای زمین‌لرزه‌ها

۱-۲- فرآیند نوسانی

فرآیند تصادفی پیوسته و مختلط-مقدار $\{X_k(t)\}$ ، که $-\infty < t < \infty$ را در نظر بگیرد. فرض می‌کنیم که فرآیند، فاقد روند و دارای میانگین صفر و واریانس متناهی است. بنابراین به ازای هر t داریم:

$$E[X(t)] = 0, \quad E[|X(t)|^2] < \infty \quad (1)$$

اگر فرآیند $\{X_k(t)\}$ عضوی از خانواده فرآیندهای نوسانی $\{\phi_t(\omega)\}$ باشد، نمایش طیفی به‌صورت رابطه (۲) می‌پذیرد

$$U_g(t) = \sum_{k=1}^p X_k(t) = \sum_{k=1}^p A_k(t) S_k(t) \quad (13)$$

در مدل فوق، $U_g(t)$ به صورت مجموع فرآیندهای گاوسی مستقل و مدولاسیون شده یکنواخت (به دلیل وجود مؤلفه‌های $A_k(t)$) با میانگین صفر می‌باشد. هر فرآیند مدولاسیون شده‌ی یکنواخت $X_k(t)$ ، از حاصل ضرب یک تابع مدولاسیون تعینی (غیر تصادفی) وابسته به زمان $A_k(t)$ و یک فرآیند گاوسی مانا $S_k(t)$ تشکیل شده است. بنابراین، مدل تصادفی زمین‌لرزه‌ها در رابطه (۱۳)، یک فرآیند گاوسی سیگما نوسانی می‌باشد.

همچنین، تابع گامای اصلاح شده نیز به عنوان تابع مدولاسیون زمان به کار برده می‌شود:

$$A_k(t) = \alpha_k (t - \zeta_k)^{\beta_k} e^{-\gamma_k(t - \zeta_k)} H(t - \zeta_k) \quad (14)$$

که در آن، α_k و γ_k ثابت‌های مثبت؛ β_k عدد صحیح مثبت، ζ_k زمان رسیدن مربوط به k امین فرآیند نوسانی $X_k(t)$ و $H(t)$ تابع پله‌ای یکه است و k امین فرآیندهای مانای گاوسی $S_k(t)$ با میانگین صفر، توسط تابع خودهمبستگی به صورت رابطه (۱۵) تبیین می‌شود:

$$R_{S_k S_k}(\tau) = e^{-\nu_k |\tau|} \cos(\eta_k \tau) \quad (15)$$

که تابعی نیمه معین مثبت^{۱۱} و تابعی از لگ $\tau = |s - t|$ و به فرم گاوسی است، و تابع چگالی طیفی متناظر آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\Phi_{S_k S_k}(\omega) = \frac{\nu_k}{2\pi} \left[\frac{1}{\nu_k^2 + (\omega + \eta_k)^2} + \frac{1}{\nu_k^2 + (\omega - \eta_k)^2} \right] \quad (16)$$

که در آن ν_k و η_k دو پارامتر آزاد، به ترتیب نشان‌دهنده‌ی پهنای باند فرکانس و فرکانس غالب (فرکانس مرکزی) فرآیند گاوسی S_k هستند. فرآیند مانای گاوسی S_k دارای تعبیری فیزیکی است. به این صورت که هنگام وقوع زلزله، یک گسل گسیخته و یا به عبارتی دچار تنش می‌شود و گسیختگی گسل اتفاق می‌افتد. در این هنگام، امواج لرزه‌ای از آن منطقه آزاد می‌شوند و در پوسته‌ی زمین شروع به انتشار می‌کنند. این امواج منتشر شده در داخل زمین، دارای فرکانس‌های مختلفی هستند

و در آن:

$$E[dZ_j^*(\omega_1) dZ_k(\omega_2)] = \Phi_{Z_k Z_k}(\omega) \delta(\omega_1, \omega_2) \quad (8)$$

و داریم:

$$E[dZ_j^*(\omega_1) dZ_k(\omega_2)] = \begin{cases} \Phi_{Z_k Z_k}(\omega), & \omega_1 = \omega_2 = \omega \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases} \quad (9)$$

تابع میانگین مربعات فرآیند سیگما نوسانی $Y(t)$ تعریف شده

در رابطه (۵)، به صورت رابطه (۱۰) است:

$$E[Y(t)]^2 = E\left[\sum_{k=1}^p X_k(t)\right]^2 = \sum_{k=1}^p E[X_k^2(t)] + \sum_{j \neq k} E[X_j^*(t) X_k(t)] \quad (10)$$

در اینجا با توجه به نمایش طیفی (۲)، متعامد بودن Z_k ها و

رابطه (۹) خواهیم داشت:

$$E[Y(t)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^p [A_k(t, \omega)]^2 \Phi_{Z_k Z_k}(\omega) d\omega \quad (11)$$

که تجزیه‌ای روی فرکانس «انرژی کل» $Y(t)$ در زمان t می‌دهد که توسط واریانس اندازه‌گیری شده است؛ بنابراین طیف توان تحولی (وابسته به زمان) فرآیند سیگما نوسانی $Y(t)$ می‌تواند بر اساس طیف توان فرایندهای نوسانی، به صورت زیر تعریف شود:

$$\Phi_{YY}(t, \omega) = E(Y(t) Y^*(t)) =$$

$$E\left(\int_{j=1}^p A_j(t, \omega_1) e^{-j\omega_1 t} dZ_j^*(\omega_1) \int A_k(t, \omega_2) e^{j\omega_2 t} dZ_k(\omega_2)\right) = \iint \sum_j \sum_k A_j(t, \omega_1) A_k(t, \omega_2) e^{-j(\omega_1 - \omega_2)t} E(dZ_j^*(\omega_1) dZ_k(\omega_2))$$

بنابراین داریم:

$$\Phi_{YY}(t, \omega) = \sum_{k=1}^p |A_k(t, \omega)|^2 \Phi_{Z_k Z_k}(\omega) \quad (12)$$

۳-۲- مدل تصادفی زلزله

در این مقاله، مدل تصادفی نامانای زمین‌لرزه‌ها را به صورت

زیر در نظر می‌گیریم که به صورت یک فرآیند سیگما نوسانی تعریف می‌شود:

شدن به صورت حاصل ضرب دو مؤلفه مجزا را ندارد. همچنین مؤلفه‌های $X_k(t)$ در رابطه (۱۳)، توسط تابع PSD در دامنه فرکانس، و تابع تک مدی میانگین مربعات در دامنه زمان، نوشته می‌شوند.

۲-۴- برآورد پارامترهای مدل

پارامترهای وابسته به زمان در مدل تصادفی زمین‌لرزه‌ها $U_g(t)$ ، به نحوی برآورد می‌شوند که تابع چگالی طیفی توان PSD ارائه شده در رابطه (۱۹)، بهترین برازش را داشته باشد. منظور از «بهترین»، این است که دارای کمترین مقدار مربعات خطای برآورد باشد. در این روش، خطا، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J(\Theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_\omega} [\Phi_{U_g U_g}(t_i, \omega_j, \Theta) - \hat{\Phi}_{U_g U_g}(t_i, \omega_j)]^2 \quad (20)$$

که در آن $\hat{\Phi}_{U_g U_g}(t_i, \omega_j)$ برآورد طیف توان PSD است و بردار پارامترهای $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{6p}]^T$ دارای اجزایی به فرم زیر است:

$$(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \zeta_k, \nu_k, \eta_k, k = 1, 2, \dots, p)$$

در اینجا ابتدا طیف توان $\hat{\Phi}_{U_g U_g}(t_i, \omega_j)$ با استفاده از روش پنجره‌ی چندگانه کوتاه‌مدت تامسون، برآورد می‌شود. سپس بردار پارامترهای فوق به گونه‌ای برآورد می‌شود که تابع $J(\Theta)$ کمترین مقدار را داشته باشد.

روش برآورد پنجره‌ی چندگانه کوتاه‌مدت تامسون منوط به استفاده از توابع موج کروی کشیده شده گسسته است که در بخش بعدی به بیان تعریف آن می‌پردازیم.

۳- توابع موج کروی کشیده شده گسسته

نکته مهمی که در تحلیل سیگنال‌ها در دامنه زمان و مکان همیشه مطرح بوده، این است که نمی‌توان هم‌زمان سیگنال‌ها را در دامنه‌ی زمان و فرکانس محدود کرد و همواره هدف این بوده که سیگنال دارای بیشترین تمرکز هم‌زمان در هر دو بعد باشد. با استفاده از رابطه‌ی (۲۱) در پهنای باند W ، داریم:

که فرآیندهایی گاوسی و غیرقابل پیش‌بینی، برخی از آن‌ها نامانا و یا حتی مانا هستند. به طوری که می‌توان یک فرآیند مانای گاوسی را به صورت ترکیب خطی از پاسخ‌های جابه‌جایی و سرعت یک نوسان کننده درجه دوم با سیستم یک درجه آزادی (SDOF) که در معرض دو نویز سفید گاوسی مستقل قرار دارد، مشاهده کرد. بنابراین، مجموعه‌ای از ضرایب ترکیب خطی را می‌توان به گونه‌ای پیدا کرد که تابع خودهمبستگی فرآیند فوق، مطابق با رابطه (۱۵) باشد

همچنین، فرآیندهای مانای $S_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, p$ نرمال می‌شوند به گونه‌ای که دارای واریانس واحد باشند. از آنجایی که شتاب زمین، به صورت یک فرآیند سیگما نوسانی گاوسی مدل‌بندی شده است، طبق رابطه‌ی (۶) میانگین مربعات شتاب زمین به صورت زیر خواهد بود:

$$E[U_g(t)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^p [A_k(t)]^2 \Phi_{S_k S_k}(\omega) d\omega = \sum_{k=1}^p [A_k(t)]^2 \quad (17)$$

که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{S_k S_k}(\omega) d\omega = R_{S_k S_k}(0) = E(S_k(t))^2$$

و از آنجا که با نرمال‌سازی فرایند، واریانس آن برابر با یک می‌شود، داریم:

$$E(S_k(t) \cdot S_j^*(t)) = E(S_k(t))^2 = \text{var}(S_k(t)) = 1 \quad (18)$$

با توجه به روابط (۵) و (۱۳) و مشابه با آنچه در رابطه‌ی (۱۲) داشتیم، طیف توان PSD، برای فرایند سیگما نوسانی مدل زمین‌لرزه‌ها، $U_g(t)$ ، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Phi_{U_g U_g}(t, \omega) = \sum_{k=1}^p [A_k(t)]^2 \Phi_{S_k S_k}(\omega) \quad (19)$$

در اینجا باید به این موضوع اشاره کرد که فرایند شتاب زمین، $U_g(t)$ ، را نمی‌توان به صورت مؤلفه‌های مجزا نوشت. اگرچه تک‌تک مؤلفه‌های این فرایند را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو عنصر جدا از هم، مدولاسیون و فرایند گاوسی مانا، نوشت ولی فرایند سیگما نوسانی $U_g(t)$ ، قابلیت نوشته

$$[A]_{m,n} = \frac{\sin(2\pi W(m-n))}{\pi(m-n)}, \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (25)$$

همچنین λ_k مقادیر ویژه‌ی غیرصفر مرتب‌شده $[A]_{m,n}$ هستند $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{N-1} > 0$ که با مفهوم تمرکز انرژی سیگنال‌ها، ارتباط مستقیم دارند. بیشترین تمرکز در سیگنال‌های $h(n)$ با پهنای باند W ، در رابطه‌ی (21)، مربوط به $\phi_{N,W}^{(0)}$ است و به‌طور متناظر برای مقادیر فرکانس سیگنال $H(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(n)e^{2\pi inf}$ ، دارای بیشترین مقدار تمرکز متناسب با $\phi_{N,W}^{(0)}(f)$ می‌باشد. با در نظر گرفتن $\phi_{N,W}(n) = [\phi_{N,W}^{(0)}(n), \phi_{N,W}^{(1)}(n), \dots, \phi_{N,W}^{(N-1)}(n)]$ به‌صورت مجموعه‌ای از N دنباله‌ی متعامد حقیقی مقدار و زمان گسسته با مقادیر ویژه λ_k ، DPSS با مرتبه‌ی صفر یعنی $\phi_{N,W}^{(0)}$ ، اولین دنباله‌ی اسلپین است که متناسب با اولین مقدار ویژه λ_0 می‌باشد و دارای بیشترین تمرکز خواهد بود.

برآورد پنجره‌ی چندگانه کوتاه‌مدت تامسون (Thomson, 1982)، روشی جهت برآورد طیف توان در سری‌های زمانی ناماناست. در اینجا فرآیند تصادفی زلزله، فرآیندی پیوسته است و بنابراین لازم است که نمونه‌گیری روی بازه‌های زمانی با فاصله‌های زمانی مساوی انجام شود. به‌طوری که $N\Delta t$ اندازه‌ی پنجره زمانی متحرک $[w(n), n = 0, 1, \dots, N-1]$ و Δt بازه‌ی زمانی نمونه‌گیری را نشان می‌دهد. با ضرب فرآیند زلزله $[U_g(t_i)]$ در این پنجره زمانی، سری‌های زمانی موضعی $[S(t_i, n)]$ در نقطه‌ی مرکزی زمان t_i ، به فرم زیر به دست می‌آیند:

$$[S(t_i, n) = U_g[t_{i+n-(N-1)/2}]w(n), n = 0, 1, \dots, N-1] \quad (26) \text{ (برای } N \text{ فرد)}$$

$$[S(t_i, n) = U_g[t_{i+n-N/2}]w(n), n = 0, 1, \dots, N-1] \quad (27) \text{ (برای } N \text{ زوج)}$$

سری‌های زمانی موضعی $[S(t_i, n)]$ ، روی بردارهای متعامد دنباله‌های موج کروی کشیده شده‌ی گسسته $\{\phi_{N,W}^{(k)}(n)\}$ ، تصویر می‌شوند، که در اینجا DPSSها بردارهای ویژه ماتریس هسته هستند (Drosopoulos & Haykin, 1992):

$$\lambda = \frac{E(N_0, N_0 + N - 1)}{E(-\infty, \infty)} = \frac{\sum_{N_0}^{N_0 + N - 1} |h(n)|^2}{\sum_{-\infty}^{\infty} |h(n)|^2} \quad (21)$$

که در آن $E(N_0, N_0 + N - 1)$ انرژی سیگنال زمان-گسسته $h(n)$ و $E(-\infty, \infty)$ انرژی کل سیگنال است.

سؤالی که همواره مطرح است این است که: به ازای کدام یک از مقادیر فرکانس، سیگنال بیشترین مقدار تمرکز در دامنه زمان را خواهد داشت. با استفاده از توابع موج کروی کشیده شده‌ی گسسته^{۱۲} (DPSWF's) که با نماد $U_{(N,W)}^k(f)$ نشان داده می‌شوند، و دنباله‌های موج کروی کشیده شده‌ی گسسته (DPSS's) با نماد $\phi_{N,W}^{(k)}(n)$ ، و همچنین مقادیر ویژه λ_k می‌توان به این سؤال پاسخ داد. توابع موج کروی کشیده شده‌ی گسسته $U_{(N,W)}^k(f)$ و مقادیر ویژه متناظر با آن‌ها $\lambda_k(N, W)$ توسط حل معادله‌ی انتگرالی به فرم زیر تعریف می‌شوند (Slepian, 1978):

$$\int_{-W}^W \frac{\sin(N\pi(f-f'))}{\sin(\pi(f-f'))} U_{N,W}^k(f) df' = \lambda_k U_{N,W}^k(f), \quad -\infty < f < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (22)$$

که در آن، $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{N-1} > 0$ مقادیر ویژه حقیقی و غیرصفر و $U_{(N,W)}^k(f)$ توابع ویژه حقیقی مستقل متناظر هستند.

دنباله‌های موج کروی کشیده شده‌ی گسسته $\phi_{N,W}^{(k)}(n)$ ، $k = 0, 1, \dots, N-1$ به‌صورت حل حقیقی دستگاه معادلات به فرم زیر تعریف می‌شوند:

$$\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sin(2\pi W(n-m))}{\pi(n-m)} \phi_{N,W}^{(k)}(m) = \lambda_k \phi_{N,W}^{(k)}(n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (23)$$

بنابراین، مجموعه‌ی DPSSها به‌صورت توابع ویژه نرمال شده

$$\phi_{N,W}(n) = [\phi_{N,W}^{(0)}(n), \phi_{N,W}^{(1)}(n), \dots, \phi_{N,W}^{(N-1)}(n)] \quad (24)$$

از ماتریس هسته $[A]_{m,n}$ با بعد N و مقادیر حقیقی و متقارن که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند، به دست می‌آیند:

$$d_k(t_i, \omega_j) = \frac{\sqrt{\lambda_k} \hat{S}(t_i, \omega_j)}{\lambda_k \hat{S}_k(t_i, \omega_j) + (1 - \lambda_k) \sigma_{t_i}^2} \quad (32)$$

رای به دست آوردن برآورد چگالی طیف توان، با در نظر گرفتن یک میانگین پنجره زمانی $[w_\tau(n), n = 1, 2, \dots, N_\tau - 1]$ ، جهت کاهش نوسانات نمونه‌گیری در طول زمان، برای تولید یک برآورد طیف توان به صورتی که تغییرات آن نسبت به زمان آهسته باشد، معرفی شده است؛ بنابراین، برآورد طیف وابسته به زمان پنجره چندگانه کوتاه‌مدت تامسون برای فرآیند زلزله $U_g(t)$ صورت رابطه (33) به دست می‌آید:

$$\hat{\Phi}_{U_g U_g}(t_i, \omega_j) = \sum_{n=0}^{N_\tau-1} \hat{S}[t_{i+n-(N_\tau-1)/2}, \omega_j] w_\tau(n) \quad (33)$$

در نهایت، برآورد $\hat{\Phi}_{U_g U_g}(t_i, \omega_j)$ برای واریانس موضعی $U_g(t)$ به صورت رابطه (34) محاسبه شده است:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \hat{\Phi}_{U_g U_g}(t_i, \omega_j) \cdot \Delta t = \sigma_{t_i}^2 \quad (34)$$

۴- شبیه‌سازی

ابتدا در اینجا، داده‌های زمین‌لرزه‌ی ال‌سترو را در نظر می‌گیریم. پنجره هانینگ 13 $5s$ ($N = 250, \Delta t = 0.02$) به عنوان پنجره‌ی زمانی متحرک در تحلیل این سری‌های زمانی، انتخاب شده است. با فرض اینکه تعداد DPSS‌ها برابر ۲ است، برای هر سری زمانی موضعی دو طیف ویژه $\hat{S}_1(t, \omega)$ و $\hat{S}_2(t, \omega)$ برآورد می‌شود. در شکل (۱)، نتایج قابل مشاهده است.

$$AV_k = \lambda_k V_k \quad (28)$$

که در آن

$$[A]_{m,n} = \frac{\sin(2\pi W(m-n))}{\pi(m-n)}$$

همچنین $V_k = [\phi^k(0), \phi^k(1), \dots, \phi^k(N-1)]^T$ ، k امین

بردار ویژه‌ی ماتریس A ؛ λ_k k امین مقدار ویژه و W پهنای باند متناهی می‌باشد. به دلیل متعامد بودن k دنباله موج کروی کشیده شده گسسته، این توابع، به‌عنوان پایه در فضا در نظر گرفته می‌شوند و با به دست آوردن ضرایب DPSS‌ها، یعنی $[S(t_i, n)]$

$$[S(t_i, n) \phi^k(n), n = 0, 1, \dots, N-1] \quad (29)$$

تصویر $[S(t_i, n)]$ روی DPSS‌ها به دست می‌آید. حال با

اعمال تبدیل فوریه‌ی گسسته این ضرایب داریم:

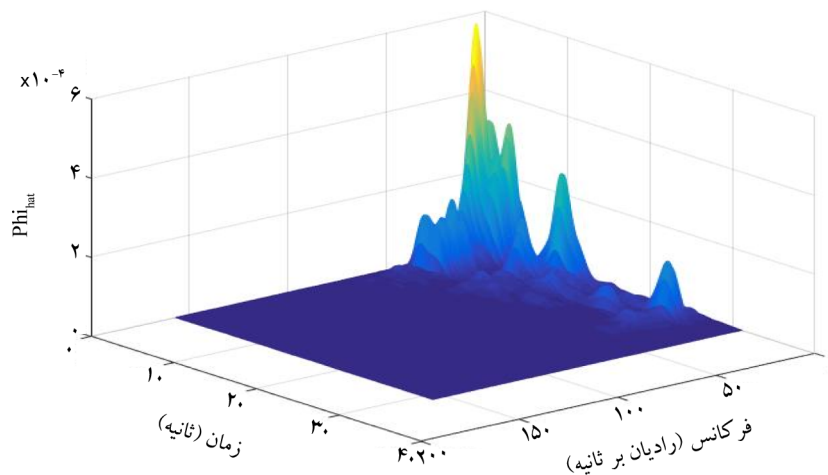
$$\hat{S}_k[t_i, \omega_j] = \left| \sum_{n=0}^{N-1} S(t_i, n) \phi^k(n) e^{-j\omega_j [n - (N-1)/2]} \right|^2, \quad (30)$$

$$k = 0, 1, \dots, K-1$$

که در آن $\omega_j = (2\pi j) / N \cdot \Delta t$ ؛ $j = 0, 1, \dots, N-1$

تابع وزنی زمان-فرکانس، می‌توان اریبی برآورد طیف $[d_k(t_i, \omega_j)]$ به‌عنوان تابع وزنی زمان-فرکانس، می‌توان اریبی برآورد طیف $\hat{S}_k(t_i, \omega_j)$ را به صورت زیر کاهش داد (Thomson, 1982):

$$\hat{S}(t_i, \omega_j) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} |d_k(t_i, \omega_j)|^2 \hat{S}_k(t_i, \omega_j)}{\sum_{k=0}^{K-1} |d_k(t_i, \omega_j)|^2} \quad (31)$$



شکل (۱): نمایش برآورد تابع چگالی طیف توان PSD زمان-فرکانس شتاب‌نگاشت^{۱۴} زمین‌لرزه ال‌سترو ۱۹۴۰ با در نظر گرفتن دو DPSS.

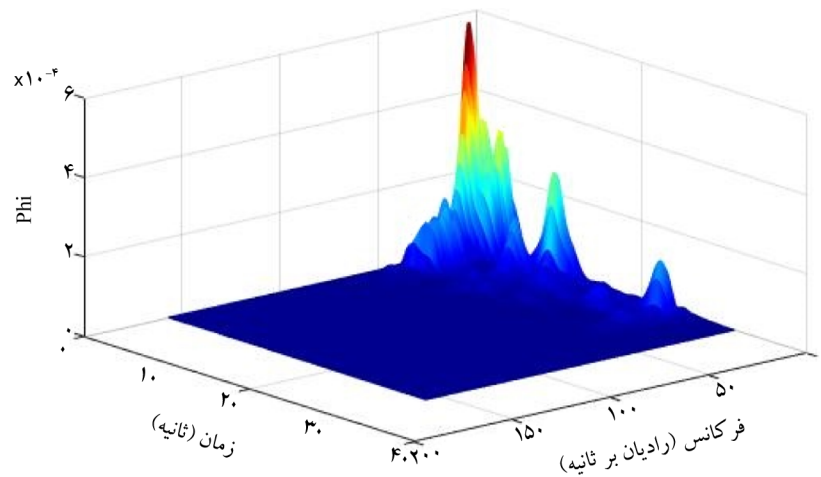
به همین ترتیب برای داده‌های زمین‌لرزه‌ی بم با در نظر گرفتن پنجره‌ی هانینگ $5s$ ($N = 250, \Delta t = 0.005$) که تعداد DPSSها در اینجا ۵ است، مراحل بالا انجام شده است و پس از محاسبه‌ی پارامترهای مدل، شکل‌های (۳) و (۴) برآورد تابع چگالی طیف توان PSD زمان-فرکانس و تابع چگالی طیف توان PSD را نشان می‌دهند.

انتخاب تعداد بهینه توابع موج کروی کشیده شده‌ی گسسته در بخش شبیه‌سازی حائز اهمیت است؛ بنابراین با اتخاذ این راهکار که با رسم نمودار تعداد DPSSها در برابر مقدار خطا، می‌توان تعداد بهینه‌ی k را انتخاب و رفتار آن را بررسی کرد، نتایج در شکل (۵) برای زلزله‌ی استرو نشان داده شده است. با افزایش تعداد DPSSها، دیده می‌شود که مقدار خطا ثابت و به صفر میل می‌کند؛ زیرا با افزایش تعداد DPSSها تعداد پارامترهایی که بایستی برآورد شوند، زیاد شده که سختی محاسبات را در پی دارد.

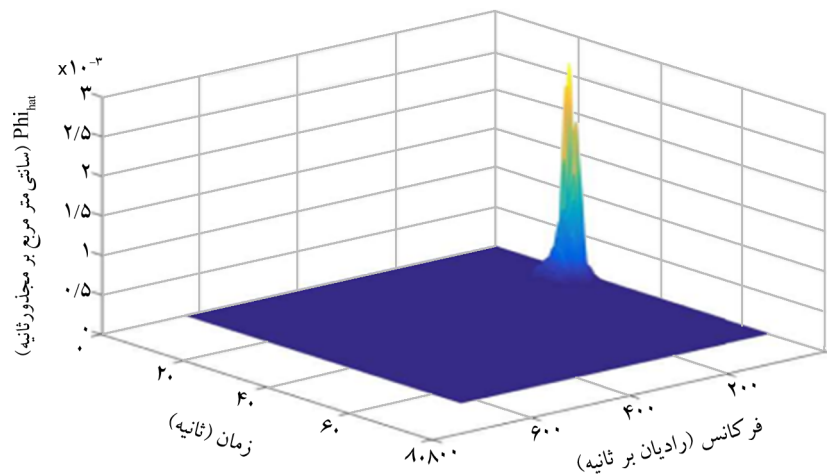
میزان خطایی که در اینجا به دست آمده، برابر $0/0014$ است. سپس توسط روش الگوریتم کمترین مربعات غیرخطی تطبیقی که روشی جهت بهینه‌سازی تابع هدف است و با استفاده از نرم‌افزار متلب، می‌توان با استفاده از روش‌های `fmincon` و `fminsearch` مقدار آن را محاسبه کرد. پارامترهای مدل فرآیند سیگما نوسانی تشکیل شده از ۲۰ جزء مستقل فرآیندهای تعدیل یافته برآورد شده و در جدول (۱) آورده شده‌اند. باید توجه داشت که $2\pi B_{F_Y}$ پارامتری نشان‌دهنده‌ی پهنای باند k امین فرآیند جزئی (نوسانی) است و تعداد نهایی پارامترهای برآورد شده برابر با $6 \times 20 = 120$ می‌باشد. شکل (۲) تابع چگالی طیف توان PSD زمان-فرکانس $\Phi_{U_i U_j}(t_i, \omega_j)$ ، از مدل زمین‌لرزه‌ی تصادفی مذکور را نشان می‌دهد که می‌توان مشاهده کرد مدل زمین‌لرزه، به خوبی کانتور PSD برآورد شده از رکوردهای واقعی زمین‌لرزه را به تصویر می‌کشد.

جدول (۱): برآورد پارامترهای مدل ال سترو ۱۹۴۰.

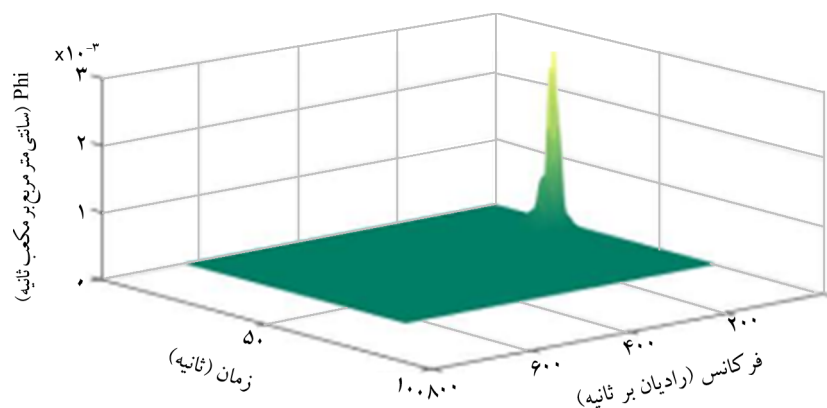
$2\pi B_{F_Y}$	η_k	ν_k	ζ_k	γ_k	β_k	α_k	k
۴/۱۷	۴/۱۷	۲/۱۱	۰/۱۱	۰/۲۸	۳/۹۱E-۰۶	۹/۸۵E-۰۵	۱
۶/۴۶	۶/۴۵	۲/۳۹	۰/۰۵	۰/۴۶	۱/۲۲E-۰۶	۰/۰۰۱۱	۲
۵/۷۱	۱/۵۵	۵/۷۱	۰/۳۲	۰/۸۶	۵/۴۱E-۰۵	۶/۹۰E-۰۵	۳
۶	۶	۱/۲۲۵	۰/۲۷	۰/۳۹	۶/۷۰E-۰۶	۳/۲۱E-۰۵	۴
۵/۲۷	۵/۲۷	۳/۲۳	۱	۰/۲۷	۱/۰۴E-۰۵	۵/۵۱E-۰۶	۵
۶/۶۵	۶/۶۵۱	۳/۱۱	۰/۶۳	۰/۱۵	۱/۳۲E-۰۵	۷/۷۳E-۰۶	۶
۵/۳۳	۵/۳۳۴	۱/۵۷	۰/۵۴	۰/۲۰	۱/۱۸E-۰۵	۲,۲۲E-۰۵	۷
۴/۹۵	۴/۹۵۴	۱/۵۸	۰/۵۱	۰/۱۵	۸/۷۸E-۰۶	۱/۵۷E-۰۵	۸
۴/۲۱	۱/۶۶	۴/۲۲	۰/۱۱	۰/۱۸	۴/۰۲E-۰۶	۴/۶۶E-۰۶	۹
۵/۱۸	۱/۵۷	۵/۱۸	۰/۱۸	۰/۶۹	۱/۸۹E-۰۶	۹/۶۵E-۰۶	۱۰
۴/۵۹	۱/۳۱	۴/۵۹	۰/۱۶	۰/۸۳	۱/۹۳E-۰۶	۱/۰۵E-۰۵	۱۱
۳/۷۷	۱/۷۰	۳/۷۷	۰/۲۴	۰/۱۱	۲/۶۵E-۰۶	۱/۳۵E-۰۶	۱۲
۳/۷۳	۱/۹۷	۳/۷۴	۰/۲۰	۰/۰۹	۳/۶۰E-۰۶	۱/۸۲E-۰۶	۱۳
۳/۷۸	۲/۳۳	۳/۷۸	۰/۱۶	۰/۰۹	۲/۲۵E-۰۶	۱/۰۶E-۰۶	۱۴
۴/۷۶	۲/۳۰	۴/۷۶	۰/۱۴	۰/۱۹	۲/۴۹E-۰۶	۱/۸۳E-۰۶	۱۵
۲/۲۴	۰/۱۸	۲/۲۴	۱	۰/۲۰	۱/۶۵E-۰۶	۱/۳۶E-۰۵	۱۶
۴/۸۳	۴/۸۳	۲/۱۵	۰/۴۲	۰/۱۶	۶/۸۵E-۰۶	۶/۴۶E-۰۶	۱۷
۴/۱۱	۱/۹۳	۴/۱۱	۰/۵۶	۰/۵۵	۲/۳۱E-۰۶	۲/۷۶E-۰۶	۱۸
۴/۰۷	۰/۱۸	۴/۰۷	۱	۰/۵۸	۹/۸۰E-۰۷	۱/۱۴E-۰۶	۱۹
۲/۹۹	۰/۱۸	۳	۱	۱	۶/۲۸E-۰۹	۷/۰۱E-۰۸	۲۰



شکل (۲): نمایش تابع چگالی طیف توان PSD زمان-فرکانس مدل زمین لرزه ال سنتر و ۱۹۴۰.



شکل (۳): نمایش برآورد تابع چگالی طیف توان PSD زمان-فرکانس شتاب‌نگاشت زمین لرزه بیم ۲۰۰۳ با در نظر گرفتن پنج DPSS.



شکل (۴): نمایش تابع چگالی طیف توان PSD زمان-فرکانس مدل زمین لرزه بیم ۲۰۰۳.

و محاسبات، جواب نسبتاً دقیقی به دست آورد. باید توجه داشت که تعداد DPSSها منحصر به فرد است و به طول داده‌های تحت بررسی، بستگی دارد. علاوه بر این، با توجه به نیاز روزافزون

همچنین برای زلزله بیم نیز در شکل (۶) تعداد بهینه برای این رکوردها ثبت و نشان داده است؛ بنابراین ما به دنبال انتخاب کمترین تعداد از DPSSها هستیم که بتوان در عین سادگی مدل

تامسون و به کار گرفتن توابع موج کروی کشیده شده گسسته برآورد شد. سپس پارامترهای مدل با استفاده از روش کمترین مربعات خطا به صورت تطبیقی به گونه‌ای برآورد شدند که تابع هدف کمترین مقدار خود را بگیرد. با ارائه‌ی راهکاری مطلوب برای انتخاب تعداد بهینه توابع موج کروی کشیده شده گسسته که یکی از مهم‌ترین نقاط در تحلیل ارزیابی عملکرد لرزه‌ای سازه‌ها است و رسم نمودار DPSS های مختلف در برابر خطا، نتایج به دست آمده بررسی شدند. نتایج به دست آمده، حاکی از آن است که مدل در نظر گرفته شده، به خوبی ویژگی‌های نامانای رکوردهای واقعی زلزله ال سنتر و ۱۹۴۰ و بم ۲۰۰۳ را به دست می‌دهد.

References

Battaglia, F. (1979). Some extensions in the evolutionary spectral analysis of a stochastic process. *Bolletino Della Unione Matematica Italiana*, 16B(5), 1154-1166.

Drosopoulos, A., & Haykin, S. (1992). *Adaptive radar detection and estimation*, Haykin, A. & Steinhardt, A., eds., John Wiley and Sons, Inc. New York, N.Y., 381-461.

Priestly, M.B. (1981). *Spectral Analysis and Time Series. Volumes I and II in 1 Book*. (Probability and Mathematical Statistics).

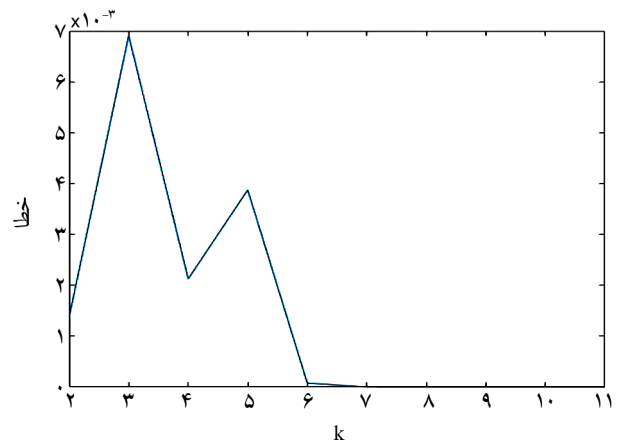
Shinozuka, M., & Deodatis, G. (1988). Stochastic process models for earthquake ground motion. *Probabilistic Engrg. Mech*, 3(3), 114123.

Slepian, D. (1978). Prolate spheroidal wave functions. Fourier analysis, and uncertainty V: the discrete case. *The Bell Sys. Tech. J.*, 57(5), 1371-1430.

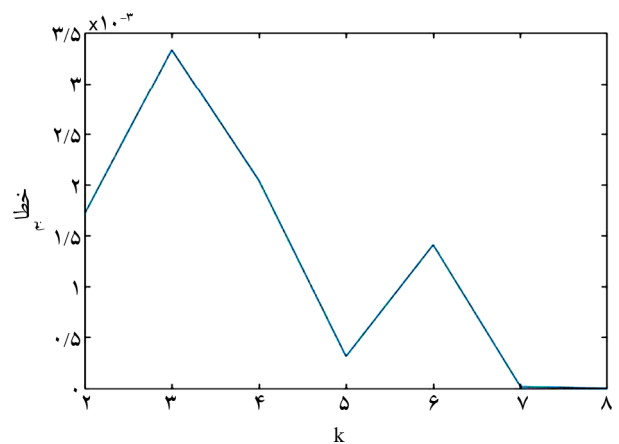
Thomson, D.J. (1982). Spectrum estimation and harmonic analysis. *Proc., IEEE*, 70(9), 1055-1096.

Vlachos, C., Papakonstantinou, K.G, & Deodatis, G. (2016). A multi-modal analytical nonstationary spectral model for characterization and stochastic simulation of earthquake ground motions, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*.

Yeh, C.-H., & Wen, Y.K. (1990). Modeling of nonstationary ground motion and analysis of inelastic structural response. *Struct. Safety*, 8(1-4), 281-298.



شکل (۵): بررسی تعداد DPSS ها در برابر خطای اندازه‌گیری شده در برآورد طیف تامسون زمین لرزه ال سنتر و بم.



شکل (۶): بررسی تعداد DPSS ها در برابر خطای اندازه‌گیری شده در برآورد طیف تامسون زمین لرزه بم.

مهندسی زلزله و سازه برای استفاده از شتاب‌نگاشت‌های زلزله جهت تعیین پاسخ سازه‌ها و ارزیابی عملکرد لرزه‌ای سازه‌ها در برابر انواع سناریوهای مختلف زلزله‌ها که بر روی سازه‌ها پیاده‌سازی می‌شوند، بهترین راه این است که در مرحله‌ی تولید رکوردها، بهینه‌سازی انجام شود چون در مرحله‌ی بعد که یک رکورد روی سازه پیاده‌سازی می‌شود، زمان زیادی باید صرف شود تا تحلیل آن را در برابر یک زلزله را بررسی کرد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تابع چگالی طیف توان PSD برای مدل زمین لرزه‌ها که به صورت فرایندهای سیگما نوسانی هستند و با استفاده از روش برآورد طیف پنجره چندگانه کوتاه‌مدت

واژه‌نامه

Sigma-Oscillatory Process	۱- فرآیند سیگما نوسانی
Short-Time Thomson's Multiple-Window Spectrum Estimation	۲- برآورد طیف پنجره چندگانه کوتاه مدت تامسون
Least Square	۳- کمترین مربعات
El Centro	۴- ال سنتر و
Bam	۵- بم
Priestly	۶- پرستلی
Battaglia	۷- باتاگلیا
Discrete Prolate Spheroidal Sequence (DPSS)	۸- دنباله‌ی موج کروی کشیده شده گسسته
Power Spectral Density (PSD)	۹- تابع چگالی طیف توان
Deterministic	۱۰- تعینی
Positive Semi Definite	۱۱- نیمه معین مثبت
Discrete Prolate Spheroidal Wave Function (DPSWF)	۱۲- تابع موج کروی کشیده شده گسسته
Hanning Window	۱۳- پنجره هانینگ
Accelerogram	۱۴- شتاب‌نگاشت

A Solution to Determine the Optimal Number of Discrete Prolate Spheroidal Sequences in Nonstationary Earthquakes Ground-Motion Model

Maral Karbaschi¹, Yasaman Maleki^{2*} and Zakariya Waezi³

1. M.Sc. Graduate, Department of Statistics, Alzahra University, Tehran, Iran

2. Research Scientist, Institute of Marine Research, Bergen, Norway and
Assistant Professor, Department of Statistics, Alzahra University, Tehran, Iran,
*Corresponding Author, email: yasaman.maleki@hi.no

3. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Shahed University, Tehran, Iran

One of the most important issues in structural earthquake engineering is the proper definition of the time history of ground motions. It has been shown in various studies that uncertainty in the frequency content had a significant effect on the response of linear and non-linear structures. Here, it is necessary to state a series of relationships first to reach the article's main topic. This article investigates the nonstationary stochastic model of the family of oscillatory sigma processes. The nonlinear random model of earthquakes is defined as a Gaussian oscillatory sigma process consisting of independent and uniformly modulated Gaussian processes with zero means. First, the estimation of the PSD is obtained by Thomson's short-term multiple window estimation method; then, the model parameters are used to estimate the model's PSD in such a way that the objective function takes its minimum value. Thomson's short-term multiple window estimation method depends on describing stretched spherical wave functions. Discrete prolate spheroidal wave functions (DPSWFs), as well as discrete prolate spheroidal sequences (DPSS), are introduced by Slepian. Thomson's multiple short-term window estimations is a method to estimate non-stationary time series. Here the earthquake process is a continuous process. Sampling on the time interval is done by considering equal time intervals. Local time series are depicted on the orthogonal vectors of discrete stretched spherical wave sequences. First, using the real earthquake data of El Center and 1940 to extract the local time series, considering the Hanning window as the moving time window. Assuming that the number of DPSS is equal to 2. For each local time series of two special spectra, parameters of the oscillatory sigma process model consisting of 20 independent components of modulated processes have been estimated by the adaptive nonlinear least squares algorithm method. In the same way, for Bam earthquake data, considering the Hanning window 5s ($N=250$, $\Delta t=0.005$), where the number of DPSSs is 5, the above steps have been done and after calculating the model parameters, the estimation of the power spectrum density function Time-frequency PSD and PSD power spectrum density function have been obtained. Our main problem is choosing the number of DPSS, and knowing that is very important in obtaining the desired simulation. Therefore, by taking this approach, by drawing a graph of the number of DPSSs against the error value, its behavior can be checked. As the number of DPSSs increases from one place to the next, the error value becomes constant and tends to zero. Therefore, we seek to select the lowest value of DPSSs. It should be noted that the number of selected DPSSs is unique and depends on the length of the data under review. Here, the obtained results indicate that the presented model shows well the characteristics of the real records of the 1940 El Centro and Bam 2003 earthquake and records the time and frequency changes in the earthquake records.

Keywords: Discrete Prolate Spheroidal Sequences, Short-time Thomson's Multiple-Window Spectrum Estimation, Sigma-Oscillatory Processes, Power Spectrum.