تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۱۷
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۸/۱۹
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۸/۲۷

فصلنامه علمی علوم و مهندسی زلزله
سال یازدهم، شماره دوم، تابستان ۱۴۰۳

DOI: 10.48303/ bese.2023.2005838.1126

نوع مقاله: مروری

مروری بر تحلیل دینامیکی محیط‌های پیوسته خطی با استفاده از روش اجزای مرزی تقابل دوگانه

پویا کاوندی
دانشجوی دکتری، گروه مهندسی عمران، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

نوید گنجیان
استادیار، گروه مهندسی عمران، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

مهدی پنجی (نویسنده مسئول)
دانشیار، گروه مهندسی عمران، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران، m.panji@iauz.ac.ir

چکیده

از یک‌سو تبلور مسائل جدید انتشار موج در محیط نیمه‌نامحدود خاک و از سوی دیگر یافتن روش‌های بهینه و کارآمد جهت حل آن، مسبب توجه ویژه‌ی پژوهشگران مختلف علوم مهندسی زلزله و ژئوتکنیک لرزه‌ای به این حوزه شده و از جمله موضوعات مهم تحقیقاتی دهه‌های اخیر محسوب می‌شود. در این مقاله با گردآوری و جمع‌بندی مطالعات گذشته، به ارائه پیشینه‌ی تحقیق حاکم بر مدل‌سازی پدیده انتشار موج و تحلیل دینامیکی خطی محیط پیوسته با استفاده از روش‌های مختلف پرداخته شده است. در این راستا ابتدا با تقسیم رویکردهای تحلیل مسئله به سه دسته روش آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی، مطالعات حوزه‌ی عددی با تکیه بر روش اجزای مرزی در دو حوزه‌ی زمان و فرکانس گزارش مروری مبسوط شده است. سپس ضمن اشاره‌ی مختصر به مبانی تئوری الاستودینامیک و معادلات اساسی حاکم در روش اجزای مرزی، ادبیات فنی مربوطه در قالب‌های مختلف فرمول‌بندی از جمله محیط کامل و نیم‌فضا ارائه شده است. در ادامه، روش تقابل دوگانه که یکی از گسترش‌های کارآمد روش مزبور در تحلیل مسائل دینامیکی است، معرفی شده و تحقیقات مرتبط به لحاظ اهمیت و به ترتیب زمان چاپ، ارائه شده است. در نهایت با تدقیق در مطالعات روش تقابل دوگانه، سعی شده تا چالش‌ها و نقاط مجهول این روش جهت ارتقای تحقیقات آتی گزارش و جمع‌بندی شود.

واژگان کلیدی: روش اجزای مرزی، تقابل‌دوگانه، تحلیل دینامیکی، روش‌های عددی، انتشار موج.

۱- مقدمه

اثر مستقیم پدیده‌هایی مانند زلزله، حرکت وسایل نقلیه و انفجار بر زیرساخت‌ها و سازه‌های بشرساخت، باعث شده تا مسئله انتشار امواج دینامیکی همواره مورد توجه محققان در علوم مهندسی زلزله قرار گیرد (Liu, 2012). مهم‌ترین روش‌های مطرح شده در بررسی پدیده انتشار موج[1] را می‌توان در سه دسته روش آزمایشگاهی، مدل‌سازی فیزیکی و مدل‌سازی ریاضی تقسیم‌بندی نمود. روش‌های آزمایشگاهی عمدتاً بر طبیعت فیزیکی مسائل منطبق می‌باشند و نتایج حاصل از آنها نسبت به سایر روش‌ها دقیق‌تر است. روش‌هایی نظیر روش انتشار مستقیم امواج مکانیکی بر بستر و عمق خاک، روش ستون تشدید و روش خمش پیزوالکتریک از جمله مهم‌ترین روش‌های آزمایشگاهی در بررسی پدیده انتشار موج هستند (Zhang & Zhao, 2014). با این حال، این دسته از روش‌ها عمدتاً نیازمند به‌کارگیری تجهیزات سخت‌افزاری دقیق می‌باشند که همواره در دسترس نبوده و به‌کارگیری آنها همواره مقرون‌به‌صرفه نیست (Stein, 2014). در سوی دیگر روش‌های مبتنی بر مدل‌سازی ریاضی قرار دارند. در این دسته از روش‌ها سعی می‌شود تا صحیح‌ترین معادلات حاکم بر پدیده انتشار موج استخراج و سپس حل شوند (Tsaur & Chang, 2018). مهم‌ترین مزیت روش‌های مبتنی بر ریاضیات، صرف هزینه و زمان کمتر در حصول نتایج است. این دست از روش‌ها، به دو دسته روش تحلیلی و عددی تقسیم می‌شوند (Bednarik et al., 2019).

در گذشته که ابزارهای محاسباتی دقیق در دسترس نبود، معادلات حاکم بر هر پدیده فیزیکی با درنظرگرفتن شرایط مرزی و اولیه معین حل شده و حل بسته پاسخ‌ها برای مسئله تحت مطالعه ارائه می‌شد. این نوع پاسخ‌ها که امروزه نیز همواره در حال توسعه است به‌عنوان پاسخ‌های تحلیلی شناخته شده‌اند. مهم‌ترین مشکل این نوع پاسخ‌ها عدم توسعه برای مسائل همسان با طبیعت است، به‌طوری‌که نیاز است تا برای مسائل با شرایط مرزی و هندسی پیچیده، مجدداً پاسخ‌های تحلیلی ارائه گردد (Bednarik et al., 2019; Singh et al, 2011; Takahashi, 2013). در اوایل سده بیستم و با رشد و توسعه رایانه‌ها و ابزارهای محاسباتی، نوع دیگری از روش‌ها با عنوان روش‌های عددی توسعه یافتند. در این دسته از روش‌ها با گسسته‌سازی محیط به اجزای کوچک و اعمال معادلات تقریبی بر روی هر جزء، تلاش می‌شود تا یک پاسخ تقریبی برای مسئله مورد نظر حاصل شود (Wolf, 1991). روش‌های عددی طیف وسیعی از روش‌ها را شامل می‌شوند. بر اساس نوع گسسته‌سازی، روش‌های عددی[2] به دو دسته روش حجمی و مرزی تقسیم‌بندی می‌شود. روش‌های حجمی[3] از جمله روش‌هایی هستند که در آنها با گسسته‌سازی دامنه مسئله به المان‌های کوچک و اعمال معادلات دیفرانسیل جزئی بر روی هر المان، در نهایت معادلات کلی محیط تشکیل شده و سپس حل می‌شوند. روش‌هایی نظیر روش تفاضل محدود (FDM)[4]، روش اجزای محدود (FEM)[5] و روش المان‌های مجزا (DEM)[6] از جمله مهم‌ترین روش‌های حجمی هستند (Cudmani & Cudmani, 2004; Matinmanesh & Asheghabadi, 2011; Martinelli et al., 2016; Poursartip & Kallivokas; 2019). استفاده از روش‌های حجمی شامل مزایای فراوانی نظیر دقت بالا، امکان مدل‌سازی مسائل با هندسه پیچیده و مدل‌سازی ساده مسائل غیرخطی می‌باشد. با این حال در برخورد با برخی محیط‌ها نظیر محیط‌های بینهایت و نیمه‌بینهایت استفاده از روش‌های حجمی از کارایی کمتری برخوردار هستند. ازآنجایی‌که در روش‌های حجمی عمدتاً گسسته‌سازی بر روی دامنه محیط انجام می‌شود، در تحلیل محیط‌های مزبور مستلزم گسترش وسعت محیط است تا از تعداد المان‌های بیشتر جهت حصول نتایج صحیح بهره گرفته شود که این امر موجب افزایش حجم محاسبات خواهد شد. در طرف دیگر روش‌های مرزی[7] قرار می‌گیرند. روش‌های مرزی روش‌هایی هستند که در آنها گسسته‌سازی بر روی مرزهای مسئله صورت می‌گیرد که این موضوع سبب کاهش حجم محاسبات در مقایسه با روش‌های حجمی می‌شود. روش‌های مرزی بر اساس نوع فرمول‌بندی به سه دسته روش‌های محیط کامل، نیم‌فضا و تقابل‌دوگانه تقسیم می‌شود. با توجه به کمبود مطالعات مروری در زمینه روش‌های مرزی به‌خصوص روش تقابل‌دوگانه، در این تحقیق سعی شده است تا پس از مرور بیان نظری و پژوهش‌های پیشین پیرامون توسعه روش‌های مرزی، در ادامه به روش تقابل‌دوگانه به‌عنوان یکی از شاخه‌های پرکاربرد روش‌های مرزی پرداخته شود و اهم تحقیقات صورت گرفته در این حوزه مورد بررسی قرار گیرد.

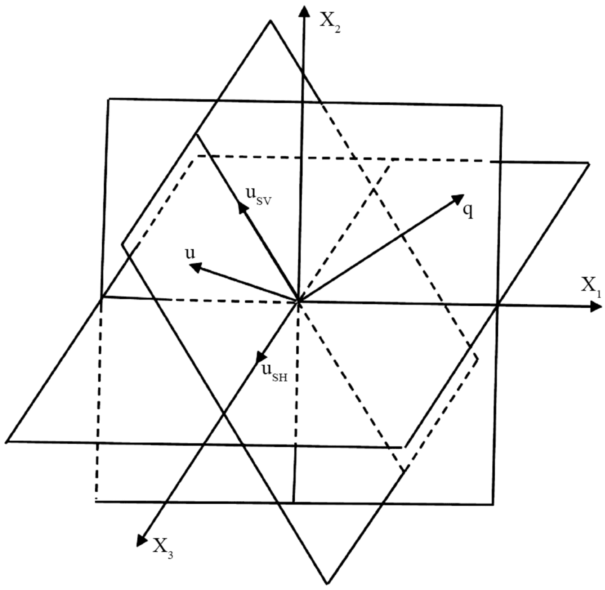
۲- روش اجزای مرزی

۲-۱- معادلات تعادل دینامیکی

معادلات انتشار موج از دیرباز توسط محققان علوم مختلف استخراج شده است. عمدتاً فرم ریاضی این معادلات یکسان بوده و تنها ضرایب عددی آن با توجه به شاخه علمی مورد مطالعه متفاوت هستند (Matinmanesh & Asheghabadi, 2011; Martinelli et al., 2016; Poursartip & Kallivokas; 2019). این نوع از معادلات عموماً برحسب معادلات لاپلاس و یا پواسون با در نظرگیری جملات مرتبط با مشتقات زمانی شناخته می‌شوند. در مسائل مرتبط با الاستیسیته معادله تعادل دینامیکی سه‌بعدی به‌صورت زیر ارائه شده است (Love, 1944):

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (۱)$$

که در آن σ_{ij} معرف مؤلفه تانسور تنش، b_i نیروی حجمی در واحد حجم، ρ چگالی محیط و u_i مبین تغییرمکان در امتداد i است.



شکل (۱): تجزیه مؤلفه تغییرمکـان انتشار مـوج در امتـداد بـردار q بـه مؤلفـه‌هـای بـرون‌صـفحه شـامل جابـه‌جـایی u_{SH} و درون‌صـفحه u_{SV} (اصلاح شده از (Dominguez, 1993))

مطـابق شــکل (۱)، لاو (Love, 1944) در ســال ۱۹۴۴ بـه کمک تجزیه هلمهولتز نشان داد که می‌توان معادله تعادل (۱) را به یک معادلـه یـک‌بعـدی بـرون‌صـفحه و یـک معادلـه دوبعـدی درون‌صفحه تجزیه کرد. در حالت یک‌بعدی که موج در راستای محور برون‌صفحه منتشر می‌شود، معادله موج اسکالر[۸] به‌صـورت زیر ارائه شده است:

$$c_s \nabla^2 u = \ddot{u} \tag{۲}$$

که در آن ∇^2 معرف عملگر لاپـلاس و c_s مبـین سـرعت مـوج برشـی در محـیط اسـت کـه از جـذر مـدول برشـی بـر چگـالی ذرات محیط حاصـل مـی‌شـود. محققـان مختلـف بـا اسـتفاده از معادله (۲) اقـدام بـه مطالعـه پاسـخ سـاختگاه‌هـای لـرزه‌ای تحـت امواج SH و در حضور عوارض توپوگرافی و لایه‌بندی نمـوده‌انـد (Reinoso et al., 1993). در حالـت دوبعـدی نیـز معادلـه درون‌صفحه انتشار موج توسط لاو (Love, 1944) به‌صورت زیر ارائه شده است:

$$\left(c_p^2 - c_s^2\right) u_{j,ij} + c_s^2 u_{i,jj} = \ddot{u} \tag{۳}$$

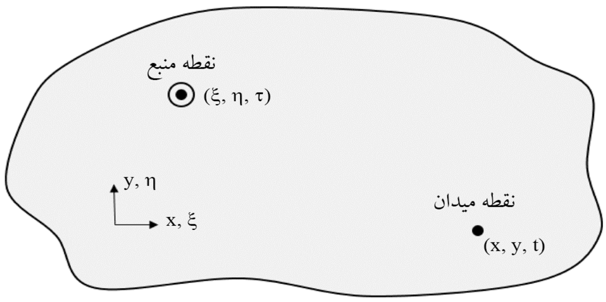
در رابطه فوق c_p معرف سرعت مـوج فشـاری در محـیط اسـت. همان‌طور که کمالیان و همکاران (Kamalian et al., 2003) در سال ۲۰۰۳ نشان دادند به کمک حل ایـن معـادلات و اسـتفاده از روش اجـزای مـرزی[۹] در حـوزه زمـان مـی‌تـوان پاسـخ دوبعـدی ساختگاه‌های شامل عـوارض توپـوگرافی را تحـت انتشـار امـواج P/SV تعیین کرد.

۲-۲- روش‌های مرزی حل معادلات

در حالت کلی روش اجزای مرزی یک روش عـددی مبتنـی بـر معـادلات انتگرالـی محـیط‌هـای پیوسـته اسـت کـه از دیربـاز برحسـب دو نـوع فرمـول‌بنـدی شـناخته شـده اسـت. اولـین نـوع معادلات که در آن مجهولات و سایر متغیرهای فیزیکی مستقیماً بر پایه‌ی مقادیر معلـومی از شـرایط مـرزی مطـرح مـی‌شـوند، بـه فرمـول‌بنـدی مسـتقیم موسـوم هسـتند (Dominguez, 1993). در نوع دوم، معلومات مرزی با استفاده از فرمول‌بندی غیرمستقیم بـه مجهولات و مقادیری که معنای فیزیکی ندارند، مرتبط می‌شوند. به‌صورت مرسوم در روش اجـزای مـرزی بیشـتر از فرمـول‌بنـدی مسـتقیم اسـتفاده مـی‌شـود. بـر ایـن اسـاس مجهـولات معـادلات انتگرالی و مقادیر مرزی بر پایه توابع میـدان (نظیـر تغییرمکـان در الاستیسیته) و مشتقات آن (نظیر بردار تنش مـرزی یـا ترکشـن در الاستیسیته) که معنای فیزیکی دارند ارائه می‌شوند. سپس هر یک از این مؤلفه‌ها با به‌کارگیری توابـع شـکل مرسـوم بـر روی نقـاط گره‌ای مرز تقریب زده می‌شوند که در ایـن راسـتا نیـاز اسـت تـا مرزهـای مسـئله بـه المـان‌هـای کوچـک مـرزی گسسـته شـود (Brebbia & Dominguez, 1992; Dominguez, 1978).

چند ویژگی مهم روش اجزای مرزی نسبت به سایر روش‌های عـددی بـه‌خصـوص روش‌هـای حجمـی، در تحلیـل اسـتاتیکی و دینامیکی محیط‌های پیوسته نمایان می‌شود. اولین ویژگی این‌روش مدل‌سازی مرزی مسئله است، بنابراین فقط لازم است تا مرزهـای محیط گسسته شوند که در مقایسه با روش‌های حجمی، از سیستم معادلات نهـایی کوچـک‌تـر بـا حجـم محـدود برخـوردار شـوند (Dominguez, 1993). ویژگـی دوم روش اجـزای مـرزی دقـت بالای پاسخ‌ها برای گره‌های مرزی و نقاط درونی[۱۰] به‌خصوص در مسائل با مرزهای نامحدود است. در برخورد با این قسم از مسائل

روش‌های حجمی نیازمند تعریف مرزهای مصنوعی و استفاده از المان‌های حجمی به تعداد بالا هستند؛ درحالی‌که روش اجزای مرزی تنها به گسسته‌سازی مرزهای محیط اکتفا کرده و پاسخ ناشی از مرزهای دوردست در بطن فرمول‌بندی روش اجزای مرزی دیده شده است (Luco & De-Barros, 1994). ویژگی سوم روش اجزای مرزی مبتنی بودن آن بر حل‌های اساسی[11] است. حل‌های اساسی پاسخ معادلات تعادل نسبت به اعمال یک بی‌نظمی واحد در فضای مکان- زمان است که می‌تواند با اقناع شرایط مرزی و اولیه مسئله تعیین گردد (Polyzos et al., 1998).



شکل (۲): تعریف شماتیک نقطه منبع به‌عنوان محل اعمال ضربه واحد و نقطه میدان به‌عنوان گیرنده اثر ضربه واحد.

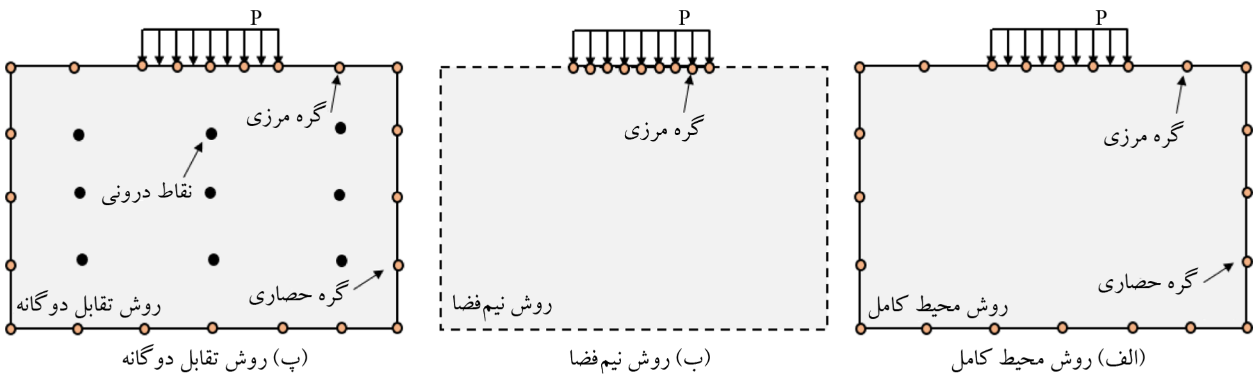
مطابق شکل (۲) به‌عنوان‌مثال از انتشار امواج دینامیکی در محیط الاستیک می‌توان به بی‌نظمی حاصل از یک ضربه واحد در یک نقطه خاص (نقطه منبع) و در یک زمان خاص (زمان مرجع) بر محیط مسئله اشاره داشت.

روش‌های مرزی بر اساس نحوه گسسته‌سازی محیط مورد بررسی، به سه دسته روش محیط کامل (FBEM)[12]، نیم‌فضا (HBEM)[13] و تقابل‌دوگانه (DRBEM)[14] تقسیم‌بندی می‌شود (Dominguez, 1993).

در شکل (۳) تفاوت مهم این‌روش‌ها در مدل‌سازی یک محیط نیمه‌نامحدود مفروض تحت بارگذاری دینامیکی سطحی نشان داده شده است. چنانچه مشاهده می‌شود، در مدل‌سازی به روش محیط کامل تحت بار دینامیکی P، نیاز است تا مرزهای پیرامونی محیط به‌صورت کامل و به کمک المان‌های مرزی گسسته‌سازی شوند. این در حالی است که در روش نیم‌فضا تنها محدوده زیر بارگذاری دینامیکی گسسته‌سازی می‌شود که این امر موجب کاهش چشمگیر حجم محاسبات خواهد شد. در روش تقابل‌دوگانه همانند محیط کامل لازم است تا کلیه مرزهای مسئله گسسته‌سازی شوند. علاوه بر آن نیاز است یکسری نقاط در درون دامنه محیط تعریف شده و همگام با گره‌های مرزی حل شوند. با این حال مزیت مهم روش تقابل‌دوگانه قابلیت توسعه آن برای مسائل پیچیده است که موجب افزایش کارایی آن نسبت به سایر روش‌ها می‌شود (Mallardo & Aliabadi, 2011; Wrobel & Brebbia, 1987; Zhu et al., 2009).

۲-۲-۱- روش اجزای مرزی محیط کامل

اولین گام‌های اساسی در زمینه توسعه روش اجزای مرزی توسط فردهولم و سیموگلینا برداشته شد (Brebbia & Dominguez, 1992). با ظهور رایانه‌ها و سیستم‌های محاسباتی مدرن، توجه زیادی به روش‌های عددی و از آن جمله روش‌های مبتنی بر گسسته‌سازی مرز صورت گرفت.

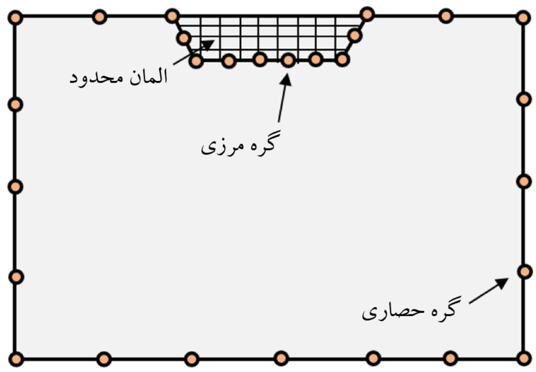


شکل (۳): مقایسه روش‌های اجزای مرزی در مدل‌سازی یک محیط نیمه‌نامحدود مفروض تحت بارگذاری سطحی.

اولین اقدامات در زمینه توسعه فرمول‌بندی روش اجزای مرزی مستقیم توسط جیسون (Jaswon, 1963)، سیم (Symm, 1963) و جیسون و پانتر (Jaswon & Ponter, 1963) برای حل مسائل پتانسیل صورت گرفت. ریزو (Rizzo, 1967) برای حل مسائل الاستواستاتیک اولین بار از یک روش مرزی استفاده کرد. لاچات (Lachat, 1975) و لاچات و واتسون (Lachat & Watson, 1976) اولین بار با معرفی توابع شکل مرزی گام مهمی جهت گسسته‌سازی و تشکیل ماتریس معادلات انتگرال مرزی برداشتند. محققان بسیاری با توسعه روش لاچات و واتسون توانستند روش اجزای مرزی را به شکل ساده شده امروزی تبدیل نمایند (Dominguez, 1993; Brebbia & Dominguez, 1992; Banerjee & Butterfield, 1981; Banerjee & Butterfield, 1977).

در سال‌های اخیر توسعه روش اجزای مرزی برای حل مسائل دینامیکی به صورت مستقل از روش های استاتیکی انجام شده است. فردمان و شاو (Friedman & Shaw, 1962) و بناگ و گلداسمیت (Banaugh & Goldsmith, 1963) را می‌توان اولین کسانی دانست که یک حل مرزی برای مدل‌سازی مسئله انتشار موج ارائه دادند. توسعه حل‌های اساسی دینامیکی نیز به سال‌های قبل از ۱۹۷۰ بازمی‌گردد. کروز (Cruse, 1968) و کروز و ریزو (Cruse & Rizzo, 1968) از اولین کسانی هستند که حل‌های اساسی کاملی برای تحلیل الاستودینامیک در فضای لاپلاس ارائه کردند. در فضای زمان، اولین بار کول (Cole et al., 1978) و سپس منصور و بربیا (Mansur & Brebbia, 1982) توانستند حل‌های اساسی برای حل مسئله انتشار موج اسکالر در محیط کامل ارائه کنند. آنتس (Antes, 1985) از جمله محققانی است که حل اساسی دقیقی برای حل مسئله انتشار موج در محیط دوبعدی در حوزه زمان ارائه کرد. برخی محققان نظیر اسپایراکوس و بسکوس (Spyrakos & Beskos, 1986) نیز حل های اساسی مشابهی جهت حل برخی مسائل الاستودینامیک ارائه کرده‌اند؛ با این حال گالگو و دومینگیوز (Gallego & Dominguez, 1990) نشان داده‌اند که این حل‌ها حالت خاصی از حل‌های اساسی آنتس (Antes,1985) می‌باشند. حل‌های اساسی و نحوه به‌کارگیری روش اجزای مرزی دینامیکی جهت مدل‌سازی مسائل الاستودینامیک سه‌بعدی توسط ویلر و استرنبرگ (Wheeler & Sternberg, 1968) و ارجن و سوحابی (Eringen & Suhubi, 1975) ارائه شد. در ادامه کارابالیس و بسکوس (Karabalis & Beskos, 1984) و کارابالیس و همکاران (Karabalis et al., 1984) توانستند در توسعه مطالعات مزبور حل‌های اساسی سه‌بعدی، پیرامون تحلیل مسائل اندرکنش خاک و سازه پیشنهاد دهند. استفاده از روش اجزای مرزی محیط کامل پیرامون مدل‌سازی دینامیکی انواع مسائل در حوزه‌ی ژئوتکنیک و ژئوفیزیک در سال‌های اخیر توسعه قابل‌توجهی یافته است که در این راستا مطالعات آلوارز- روبیو و همکاران (Alvarez-Rubio et al., 2004; Alvarez-Rubio et al., 2005)، کمالیان و همکاران (Kamalian et al., 2006; Kamalian et al., 2008)، شنگ و همکاران (Sheng et al., 2005)، جین و همکاران (Jin et al., 2018) و لک و همکاران (Lak et al., 2019) در حالت دوبعدی و مطالعات فهمی (Fahmy, 2022)، تاکاهاشی و همکاران (Takahashi et al., 2022) و سان و همکاران (Sun et al., 2023) جهت مسئله انتشار موج سه‌بعدی از اهمیت فراوانی برخوردار است.

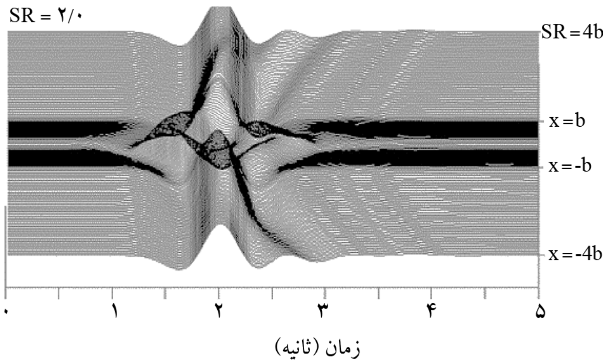
در شکل (۴) دامنه آبرفت زیرسطحی به کمک المان‌های محدود، مرز آن به کمک المان‌های مرزی و مرزهای کناری به کمک المان‌های مرزی حصاری گسسته شده است.



شکل (۴): نحوه استفاده هم‌زمان از روش المان محدود و المان مرزی در مدل‌سازی محیط‌های نیم‌صفحه (Kamalian et al., 2006).

۲-۲-۲- روش اجزای مرزی نیم‌فضا

مسئله انتشار موج اسکالر در یک نیم‌فضای الاستیک و در حوزه زمان اولین بار توسط هیرای (Hirai, 1988) مورد توجه قرار گرفت. توسط پنجی و همکاران (Panji et al., 2013) حل‌های اساسی تحلیلی جهت حل مسائل مرتبط با انتشار موج اسکالر در محیط نیم‌فضا ارائه شده است. در مطالعه مزبور نتایج حاصل از مدل‌سازی مسئله انتشار موج اسکالر در محیط نیم‌فضا با پاسخ‌های تحلیلی در ادبیات فنی مقایسه شده است. شکل (۵) الگوهای پراکنش امواج اسکالر در حضور عارضه توپوگرافی از نوع دره نیم‌سینوسی با نسبت شکل، ۲ = SR را نشان می‌دهد که به‌خوبی مبین کارایی روش اجزای مرزی نیم‌فضا در مدل‌سازی عوارض سطحی است (Panji et al., 2013; Panji et al., 2014).



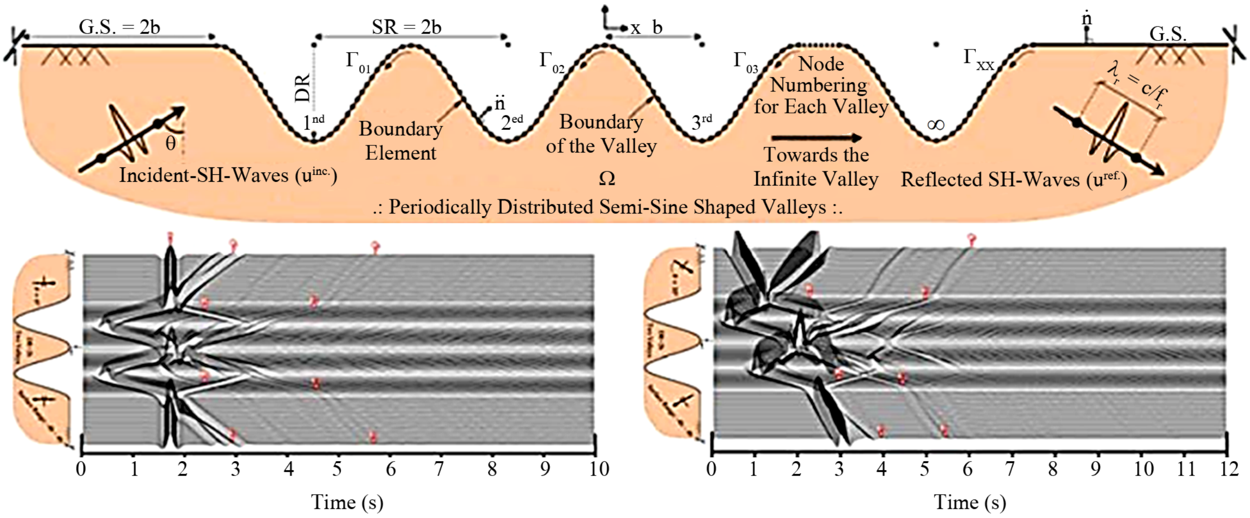
شکل (۵): الگوی پراکنش امواج از سطح دره نیم‌سینوسی تحت هجوم امواج اسکالر SH (Panji et al., 2013).

در مطالعه پنجی و انصاری (Panji & Ansari, 2017) امکان به‌کارگیری از روش اجزای مرزی نیم‌فضا در حوزه زمان برای مدل‌سازی مسائل مرتبط با پوشش نگهداری تونل‌های زیرسطحی توسعه داده شده و الگوی بزرگنمایی سطح در حضور این عوارض نشان داده شده است. نکته مهم در این تحقیق تمرکز گسسته‌سازی بر روی مرزهای تونل و پوشش آن و عدم نیاز به گسسته‌سازی مرزهای دوردست می‌باشد.

پنجی و مجتبی‌زاده (Panji & Mojtabazadeh, 2018) قابلیت مهم روش اجزای مرزی نیم‌فضا را در مدل‌سازی حفرات زیرسطحی چندگانه نشان دادند. همچنین در مطالعه پنجی و همکاران (Panji et al., 2020) روش اجزای مرزی نیم‌فضا برای تحلیل لایه‌های ناهمگن زیرسطحی تحت تأثیر امواج اسکالر توسعه داده شده است.

پنجی و مجتبی‌زاده (Panji & Mojtabazadeh, 2020; Panji & Mojtabazadeh, 2021) اقدام به مدل‌سازی عوارض توپوگرافی مرکب در حوزه‌های رسوبی به کمک روش اجزای مرزی نیم‌فضا نمودند.

در شکل (۶) نمونه‌ای از مدل ساخته شده توسط این محققان و پاسخ‌های حوزه زمان ارائه شده است. چنانچه مشاهده می‌شود تنها مرزهای مرتبط با عارضه توپوگرافی گسسته‌سازی شده است که این امر موجب افزایش کارایی و سرعت محاسبات می‌شود.

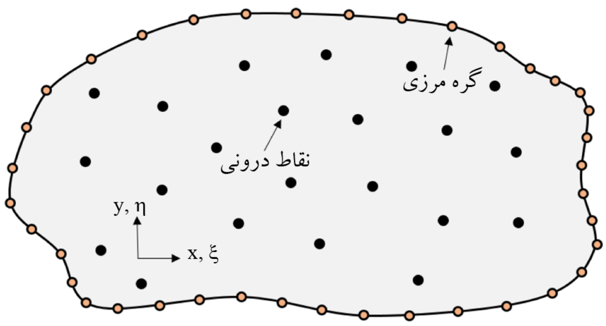


شکل (۶): پراکنش امواج اسکالر SH در حضور عوارض توپوگرافی مرکب سطحی (Panji & Mojtabazadeh, 2020). در این شکل تاریخچه زمانی نحوه پراکنش امواج در سطح زمین در زاویه انتشار صفر و ۳۰ درجه مقایسه شده است.

مجتبی‌زاده و همکاران (Mojtabazadeh et al., 2022) با توسعه فرمول‌بندی روش اجزای مرزی نیم‌فضا توانستند حل‌های اساسی دینامیکی و انتگرال مرزی مرتبط با محیط نیم‌فضای ارتوتروپ دوبعدی را ارائه نمایند. علاوه بر امواج اسکالر اخیراً حل بسته‌ی توابع گرین نیم‌فضا در حوزه‌ی زمان برای حل مسئله انتشار موج سه‌بعدی توسعه داده شده است که نتایج آن در مطالعه عرفانی‌نیا و همکاران یافت می‌شود (Erfaninia et al., 2023).

۲-۲-۳- روش اجزای مرزی تقابل‌دوگانه[15]

یکی دیگر از روش‌های حل مرزی معادلات تعادل دینامیکی، روش تقابل دوگانه است. این‌روش اولین بار توسط نادرینی و بربیا (Nardini & Brebbia, 1983) با ایده به‌کارگیری حل‌های اساسی استاتیکی جهت حل مسائل دینامیکی توسعه یافت. علاوه بر سادگی، یکی از مزیت‌های این روش آن است که سیستم معادلات تعادل دینامیکی نهایی آن مشابه سیستم معادلات روش‌های حجمی نظیر اجزای محدود است و می‌توان به کمک آن مسائل پیچیده را مدل‌سازی نمود. با این حال این‌روش خالی از کمبود نیست و مطابق شکل (۷) یکی از مهم‌ترین مشکلات آن استفاده از نقاط درونی جهت حل معادلات تعادل است که می‌تواند تا حدودی مسئله را از حالت مدل‌سازی صرفاً مرزی خارج سازد. مطالعات انجام شده نشان داده است که تعداد نقاط درونی استفاده شده برای تحلیل دینامیکی به کمک



شکل (۷): نحوه گسسته‌سازی و استفاده از نقاط درونی در روش اجزای مرزی تقابل‌دوگانه در این شکل مختصات نقاط منبع موج در سیستم (ξ, η) و مختصات نقاط دریافت کننده موج در سیستم (x, y) معرفی شده است.

روش تقابل دوگانه به‌مراتب کمتر از روش‌های حجمی است (Nardini & Brebbia, 1983; 1985; 1986).

در این قسمت به‌اختصار به ارائه فرمول‌بندی روش تقابل دوگانه در تحلیل دینامیکی سازه‌ها پرداخته می‌شود. مطابق روش باقیمانده‌های وزن‌دار، در روش تقابل دوگانه تابع وزن انتخاب شده می‌تواند حل اساسی استاتیکی به‌صورت زیر باشد (Nardini & Brebbia, 1983):

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{ij,j} + b_i\right).u^*_{lk\_static}\, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.u^*_{lk\_static}\, d\Omega \qquad (۴)$$

که در آن $u^*_{lk\_static}$ مبین حل‌های اساسی استاتیکی، ρ چگالی، b_i مؤلفه نیروهای حجمی، $\sigma_{ij,j}$ مشتقات تانسور تنش و u مؤلفه تغییرمکان را نشان می‌دهد. یک ویژگی مهم انتگرال فوق، تبدیل ضرب کانولوشن[16] به ضرب نقطه‌ای (.) به دلیل استفاده از حل‌های اساسی استاتیکی است. بدین‌ترتیب با اعمال فرآیند مرزی‌سازی و استفاده از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء، انتگرال حجمی سمت چپ رابطه (۴)، به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$c_{lk} u_k + \int_{\Gamma} p^*_{lk}\, u_k\, d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*_{lk}\, p_k\, d\Gamma = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}.u^*_{lk}\, d\Omega \qquad (۵)$$

که در رابطه فوق u^*_{lk} و p^*_{lk} به ترتیب حل‌های اساسی استاتیکی برای مؤلفه تغییرمکان و بردار تنش مرزی، و u_k و p_k به ترتیب تغییرمکان و بردار تنش مرزی هستند. c_{lk} مبین ثوابتی هستند که از اثر زاویه شکست مرزی قابل حصول می‌باشند. برای مرزی‌سازی انتگرال حجمی در طرف راست رابطه (۵)، از مفهوم توابع کمکی (توابع تقریب[17]) استفاده می‌شود. بدین‌ترتیب فرض می‌شود که میدان تغییرمکان به‌صورت تقریبی از حاصل‌ضرب یک میدان صرفاً مکانی معلوم در یک میدان صرفاً زمانی مجهول به‌صورت زیر حاصل می‌شود (Nardini & Brebbia, 1983, 1986):

$$u_k \cong \sum_{m=1}^{M} \alpha_k^m(t) f^m(x) \rightarrow \ddot{u}_k \cong \sum_{m=1}^{M} \ddot{\alpha}_k^m(t) f^m(x) \qquad (۶)$$

که در آن $\alpha_k^m(t)$ مبین توابع زمانی مجهول و $f^m(x)$ توابع مکانی معلوم هستند که قبل از حل مسئله تعیین می‌شوند. در این

رابطـه M تعـداد کـل توابـع بـه‌کـار رفتـه جهـت تقریـب میـدان تغییرمکـان را نشـان مـی‌دهـد؛ بنـابراین مؤلفـه اینرسـی میـدان تغییرمکان از طریق اعمال مشتقات زمانی بـر روی توابـع $\alpha_k^m(t)$ پیاده‌سازی می‌شود. با جایگـذاری تقریـب رابطـه (۶) در انتگـرال حجمی رابطه (۵) ازآنجایی‌که مقدار توابع مکانی $f^m(x)$ معلوم هستند، می‌توان مجدداً از فرآینـد مـرزی‌سـازی اسـتفاده کـرده و معادلـه انتگـرال مـرزی کامـل را بـه‌صـورت زیـر تعیـین نمـود (Nardini & Brebbia, 1986):

$$c_{lk}u_k + \int_\Gamma p^*_{lk}u_k\,d\Gamma = \int_\Gamma u^*_{lk}\,p_k\,d\Gamma + \rho\sum_{m=1}^{M}\ddot{\alpha}_k^m\left\{c_{lk}\psi^m_{kn} + \int_\Gamma p^*_{lk}\,\psi^m_{kn}\,d\Gamma - \int_\Gamma u^*_{lk}\eta^m_{kn}\,d\Gamma\right\} \qquad (۷)$$

در رابطه فوق، ψ^m_{kn} و η^m_{kn} بـه ترتیـب حـل‌هـای اساسـی ثانویـه ناشی از مرزی‌سازی مجدد بـر روی مؤلفـه توابـع تقریـب مکـانی هستند. در اکثر پژوهش‌ها پیرامون روش تقابل‌دوگانه بـه مشـاهده تـأثیر انـواع تـابع $f^m(x)$ در کیفیـت و کـارایی نتـایج حاصـل از روش مزبـور پرداختـه شـده اسـت. نـاردینی و بربیـا (Nardini & Brebbia, 1983; 1985) به‌عنوان توسعه‌دهنـدگـان روش تقابل دوگانه توابعی نظیر جملات مثلث خیام- پاسکال[۱۸]، سری‌های مثلثاتی[۱۹] و فاصله نقطه منبع از میدان[۲۰] را به‌عنـوان تـابع تقریب مناسب جهت حل مسائل مختلف توصیه کرده‌اند.

۲-۲-۳-۱- توابع تقریب در روش تقابل دوگانه

توابع تقریـب در روش تقابـل دوگانـه تـوابعی هسـتند کـه بـه کمک آنها تغییرات مکانی میدان تغییرمکان تخمین زده می‌شود. ویژگی اصلی این نوع توابع آن است که می‌بایست قبل از شـروع تحلیل شکل و نوع این توابع مشخص باشند. مطالعات متعددی بر روی نوع توابع تقریب و اثر آن بر دقت نتایج در مسائل گوناگون انجام گرفته است. پارتریج و بربیا (Partridge & Brebbia, 1990) از اولـین کسـانی هسـتند کـه تـوابعی بـه شـکل $f^m(x) = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n$ (r مبین فاصله نقطـه منبـع از نقطـه گیرنده پاسخ است) را برای حل انواع مسائل دینامیکی در حـوزه زمان و فرکانس توصیه کرده‌انـد. در هـر تـابع تقریـب عـلاوه بـر مشخص بـودن شـکل و فـرم، لازم اسـت بـه لحـاظ فرمـول‌بنـدی به‌گونه‌ای باشد که قابلیت تعیـین حـل‌هـای اساسـی ثانویـه بـدون مشکلات محاسباتی مهیا شود. از این‌رو مهم‌ترین توابع تقریـب و حل‌های اساسی ثانویه که در سال‌های اخیر در کاربردهای مختلف مورد توجه قرار گرفته است در جدول (۱) گزارش شده است.

جدول (۱): توابع تقریب مکانی مهم و کاربرد آن‌ها در روش اجزای مرزی تقابل‌دوگانه (در کلیه عبارت‌ها، r مبین فاصله نقطه منبع از نقطـه گیرنـده پاسخ است).

نوع تابع تقریب	معادله	Ψ_{kn}	کاربرد	مرجع
ثابت	$f(x)=1$	$\psi_{kn} = \frac{1-2\nu}{5-4\nu}r_k r_n r^2$ $r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$	انواع مسائل با تغییرات اندک شدت بارگذاری در دامنه مکان	(Nardini & Brebbia, 1983; 1985)
تابع خطی روی مؤلفه‌های مختصات	$f(x)=x_k$	$\psi_{kn} = a_1\delta_{ni}x_k + a_2\delta_{ik}x_n + a_3\delta_{kn}x_i$ $a_1 = -\frac{1}{16(3-4\nu)},\quad a_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}a_1$ $a_3 = -(5-8\nu)a_1$	انواع مسائل با تغییرات خطی شدت بارگذاری در راستای محورهای مختصات	(Nardini & Brebbia, 1983; 1985)
تابع فاصله	$f(x)=r$	$\psi_{kn} = \left[\left(3-\frac{10\nu}{3}\right)\delta_{kn} - r_k r_n\right]\frac{r^3}{30(1-\nu)}$	انواع مسائل با اثر شعاعی بارگذاری در دامنه	(Wrobel & Brebbia, 1987)
تابع هارمونیک	$f(x)=\sin\left(\frac{m\pi}{L}x_k\right)$	$\psi_{kn} = \left[\left(\frac{L}{m\pi}\right)^2\left(-\delta_{kn} + \frac{1}{2(1-\nu)}\delta_{ni}\delta_{ki}\right)\right]\sin\left(\frac{m\pi}{L}x_k\right)$	مسائل مرتبط با بارگذاری هارمونیک	(Nardini & Brebbia, 1983; 1985)
تابع لگاریتمی	$f(x)=r^2\ln r$	$\psi_{kn} = \frac{r^4}{576(1-\nu)G}\times$ $\left\{\left[3(11-12\nu)\ln r - 2(8-9\nu)\right]\delta_{kn} - (12\ln r - 5)r_{,i}r_{,j}\right\}$	تحلیل صفحات جدار نازک	(Aganantiaris et al., 1998)

ادامه جدول (۱).

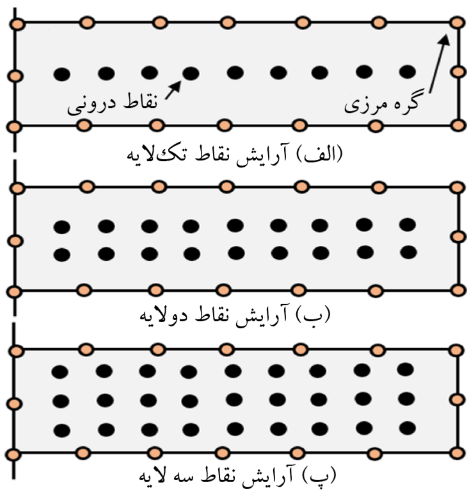
نوع تابع تقریب	معادله	Ψ_{kn}	کاربرد	مرجع
تابع نمایی	$f(x)=e^{-\frac{r^2}{c^2}}$	$\psi_{kn}=\frac{1}{4(1-\nu)G}\left[(3-4\nu)G-Q\right]\times$ $\delta_{kn}-\frac{r}{4(1-\nu)G}\frac{d}{dr}(G+Q)\ r_{,i}r_{,j}$ $G=\frac{c^2}{4}E_1\left(\frac{r^2}{c^2}\right)+R_1\ln r,$ $Q=-\frac{c^4e^{-\frac{r^2}{c^2}}}{4r^2}+R_5+\frac{R_6}{r^2}$ $R_1=\frac{c^2}{2},\quad R_5=-\frac{c^2}{4},\quad R_6=\frac{c^4}{4}$ $E_1(x)=-0.577215-\ln x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n.n!}$	تحلیل حفرات تحت بارگذاری درون‌صفحه	(Aganantiaris et al., 1998)
تابع کسری درجه ۱	$f(x)=\frac{1}{r}$	$\psi_{kn}=\frac{1}{16(1-\nu)G}\left((7-8\nu)\delta_{kn}-r_{,k}r_{,n}\right)r$	مسائل مرتبط با محیط‌های نیم‌صفحه	(Andrej, 2005)
تابع کسری درجه ۴	$f(x)=\frac{1}{r^4}$	$\psi_{kn}=\frac{1}{2(1-\nu)Gr^2}\left((0.5-\nu)\delta_{kn}+r_{,k}r_{,n}\right)$	مسائل مرتبط با محیط‌های نیم‌صفحه	(Andrej, 2005)
تابع کسری درجه ۶	$f(x)=\frac{1}{r^6}$	$\psi_{kn}=\frac{1}{6(1-\nu)Gr^4}\left((0.75-0.5\nu)\delta_{kn}-r_{,k}r_{,n}\right)$	مسائل مرتبط با محیط‌های نیم‌صفحه	(Andrej, 2005)
تابع کسر جذری	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{r}}$	$\psi_{kn}=\frac{2}{45(1-\nu)G}\left(\left(\frac{16}{3}-6\nu\right)\delta_{kn}-r_{,k}r_{,n}\right)r^{\frac{3}{2}}$	مسائل مرتبط با محیط‌های نیم‌صفحه	(Andrej, 2005)

۲-۲-۳-۲- روش تقابل‌دوگانه در حل مسائل حوزه زمان

استفاده از روش تقابل دوگانه برای حل مسائل غیرخطی انتقال حرارت دینامیکی توسط روبل و بربیا (Wrobel & Brebbia, 1987) گزارش شده است. در این مطالعه از تابع فاصله به‌صورت $f(x)=r$ به‌عنوان تابع تقریب استفاده شده است. همچنین توصیه شده است که برای مسائل تقارن محوری از تابع تقریب به فرم زیر استفاده شود:

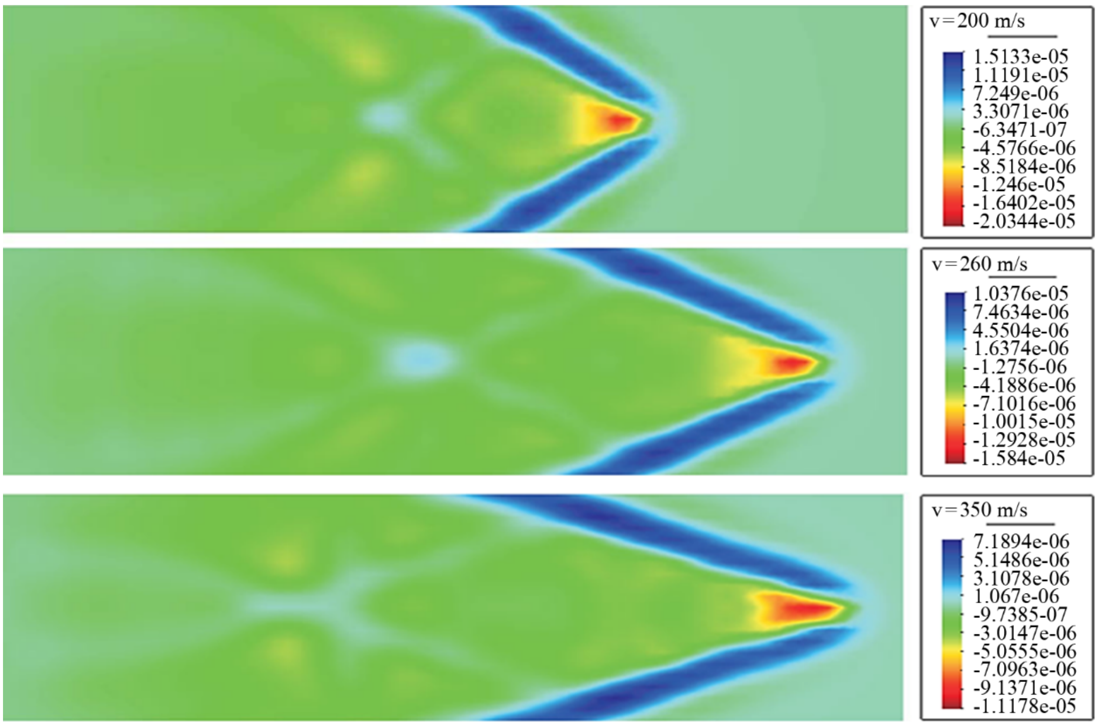
$$f(x)=r*\left(1-\frac{r_i}{4r}\right) \tag{8}$$

که در آن r فاصله از محور تقارن است. این تابع می تواند نتایج دقیق‌تری نسبت به سایر توابع ارائه دهد. در پژوهش گروندمن (Grundemann, 1989) نحوه به‌کارگیری روش تقابل دوگانه و معادلات حاکم در حل مسائل مقدار مرزی در الاستیسیته و انتقال حرارت ارائه شده است. پارتریج و همکاران (Partridge et al., 1992) نحوه استفاده از روش تقابل‌دوگانه را برای حل مسائل دینامیکی مرتبط با الاستیسیته در حالت خطی و غیرخطی شرح دادند. کونتونی و همکاران (Kontoni et al., 1991) با استفاده از روش تقابل‌دوگانه مسئله انتشار موج هارمونیک را حل کردند. در این مطالعه از توابع ثابت و چندجمله‌ای برای تقریب مکانی میدان تغییرمکان بهره گرفته شده است. شکل (۸) مبین نحوه انتخاب نقاط درونی در این تحقیق است.



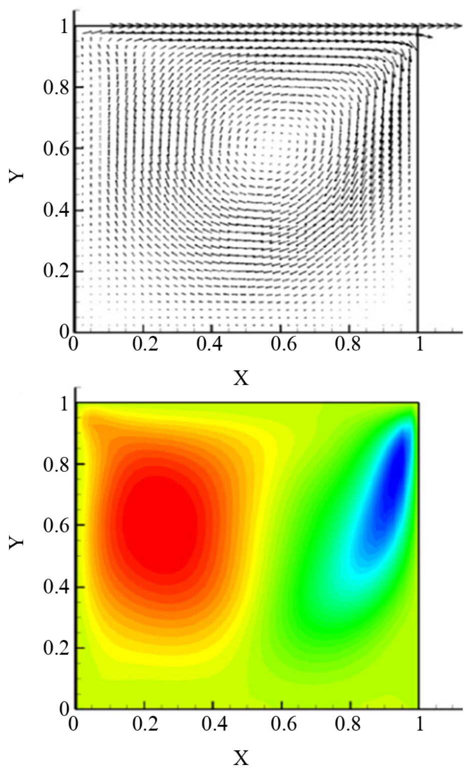
شکل (۸): نحوه انتخاب نقاط درونی برای تعیین نتایج قابل قبول در تحلیل دینامیکی هارمونیک (Kontoni et al., 1991)

کامیا و همکاران (Kamiya et al., 1993) از دیگر محققانی بودند که با استفاده از روش تقابل‌دوگانه اقدام به حل مسئله انتشار موج هارمونیک در یک محیط دوبعدی نمودند. در مطالعه فدلینسکی و همکاران (Fedelinski et al., 1993) با تحلیل مثال‌های متعدد نحوه مدل‌سازی پدیده انتشار ترک دینامیکی[۲۱] در مصالح سخت شرح داده شده است. کونتونی و همکاران (Kontoni et al., 1987) توانستند با استفاده از روش تقابل دوگانه مسئله انتشار موج در یک محیط الاستوپلاستیک را بررسی نمایند. در تحقیق مزبور با به‌کارگیری حل‌های اساسی استاتیکی در محیط‌های الاستوپلاستیک، تأثیر پارامترهای نوع تابع تقریب و نحوه انتخاب نقاط درونی بر دقت روش ارزیابی شد. آگانانتالیس و همکاران (Aganantiaris et al., 1998) به مطالعه تأثیر نوع توابع تقریب بر پاسخ روش تقابل‌دوگانه در مسئله انتشار موج پرداختند. در این مطالعه با مدل سازی مسائل کلاسیک الاستودینامیک سعی شده تا تأثیر توابع تقریب برای محاسبه هرچه دقیق‌تر پاسخ‌های تغییرمکان ارائه شود. گولبرگ و همکاران (Golberg et al., 1998) با مطالعه اثر توابع تقریب بر همگرایی نتایج حاصل از روش تقابل دوگانه نشان دادند که صرف‌نظر از جملات خطی در توابع تقریب موجب ایجاد خطا در نتایج خروجی می‌شود و تدقیق نتایج در روش مزبور مستلزم انتخاب مناسب توابع تقریب، نحوه گسسته‌سازی مرزی و محل مناسب نقاط درونی است. در مطالعه تاناکا و چن (Tanaka & Chen, 2001) توسعه روش اجزای مرزی تقابل دوگانه و نحوه انتگرال‌گیری زمانی این روش بهبود داده شد. سوون و همکاران (Suo-wen et al., 2005) توانستند مبانی تئوریک و عددی مدل‌سازی مسئله انتشار موج به کمک روش اجزای مرزی تقابل‌دوگانه را در محیط‌های بسته نظیر صفحات نازک ارائه نمایند. در این تحقیق تأثیر دو تابع تقریب $f(x)=1+r$ و $f(x)=1-r-r^2$ با یکدیگر مقایسه شده است. در پژوهش آندریج (Andrej, 2005) از روش اجزای مرزی تقابل‌دوگانه برای مدل‌سازی پدیده انتشار موج ناشی از حرکت اتومبیل‌های سنگین بر لایه‌های راه‌سازی استفاده شد. در این تحقیق با توسعه توابع تقریب نیم‌صفحه، نحوه استفاده از روش مزبور در محیط‌های نیم‌صفحه شرح داده شده است. در شکل (۹) اثر حرکت وسایط نقلیه با سرعت بسیار بالا بر تغییرمکان لایه خاک توسط روش اجزای مرزی تقابل دوگانه نشان داده شده است.



شکل (۹): اثر حرکت وسایط نقلیه سریع بر تغییرمکان ذرات بستر به کمک روش تقابل دوگانه (Andrej, 2005).

در پژوهش سیائو و همکاران (Hsiao et al., 2007) نتایج حاصل از توابع تقریب معرفی شده توسط ناردینی و بربیا (Nardini & Brebbia, 1985) و توابع تقریب دیگر محققان در مدل‌سازی مسائل مرتبط با الاستودینامیک مقایسه شدند. نتایج آنها نشان داد که انتخاب نوع تابع تقریب با توجه به مسئله مورد ارزیابی متفاوت بوده و نمی‌توان به‌صراحت یک تابع تقریب مشخص برای کلیه مسائل دینامیکی معرفی کرد. سامان و راشد (Samman & Rashed, 2007) به حل مسئله انتشار موج گذرا به کمک روش تقابل دوگانه پرداختند. در این تحقیق از یک تابع تقریب بهینه، استفاده شد که می‌تواند دقت نتایج را برای مدل‌سازی پدیده انتشار موج افزایش دهد. سامان و همکاران (Samaan et al., 2007) توانستند برای حل مسئله ارتعاش آزاد موج در محیط دوبعدی الاستیک از روش تقابل‌دوگانه بهره ببرند. این محققان از توابع تقریب چندجمله‌ای مکانی برای تقریب میدان تغییرمکان کمک گرفته و نشان دادند که این‌گونه تقریب قابلیت تحلیل مسائل ارتعاش را دارا می‌باشد. در مطالعه آلباکرک و همکاران (Albuquerque et al., 2007) توابع تقریب جدیدی برای حل مسائل انتشار موج در صفحات جدار نازک ارائه شد. ویژگی اصلی توابع مزبور در تمایز با نمونه‌های پیشین، اعمال پارامترهای زاویه و محل قرارگیری نقاط درونی در محاسبات می‌باشد که این موضوع مسبب افزایش پارامترهای مدل شده است. امیدوار و همکاران (Omidvar et al., 2009) از روش اجزای مرزی تقابل دوگانه برای مدل‌سازی پدیده انتشار ترک دینامیکی در حوزه زمان استفاده کردند. در این تحقیق ترک‌های ناشی از تماس دو نوع مصالح مجزا در وجه میانی مورد مطالعه قرار گرفته و به‌منظور صحت‌سنجی از نتایج داده‌های آزمایشگاهی استفاده شده است. ژو و همکاران (Zhu et al., 2009) با استفاده از روش تقابل‌دوگانه به مطالعه پدیده انتشار موج دینامیکی در حضور عوارض توپوگرافی پرداختند. چویی و بالاراس (Choi & Balaras, 2009) توانستند معادلات غیرخطی ناویر- استوکس[22] در محیط‌های تراکم‌ناپذیر را به روش تقابل دوگانه تحلیل نمایند. این محققان از توابع تقریب لگاریتمی برای تقریب میدان تغییرمکان و فشار دینامیکی بهره گرفتند. بر اساس نتایج این تحقیق در شکل (۱۰) نحوه انتشار جریان دینامیکی در یک محیط مربعی دوبعدی به کمک روش اجزای مرزی تقابل‌دوگانه ارائه شده است. در مطالعه کارر و همکاران (Carrer et al., 2009) به مدل‌سازی انتشار موج اسکالر در محیط‌های لایه‌ای به کمک روش تقابل‌دوگانه پرداخته شده است. یان و همکاران (Yan et al., 2010) با توسعه روش تقابل‌دوگانه یک روش جدید با عنوان روش هیبرید دوگانه را معرفی نمودند که ترکیبی از روش‌های تقابل‌دوگانه (DRBEM)، روش نقطه مرزی مرکب (HBNM)[23] و روش تقریب شعاعی (RPIM)[24] است.



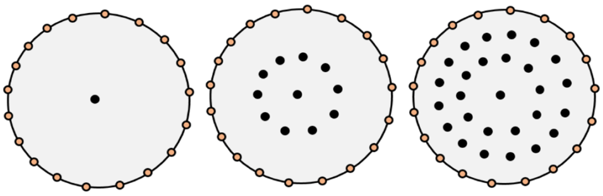
شکل (۱۰): حل معادلات ناویر- استوکس و نحوه انتشار جریان دینامیکی در یک ناحیه مربعی به کمک روش تقابل دوگانه (Choi & Balaras, 2009).

حمزه‌جواران و همکاران (Hamzeh Javaran et al., 2011) پیشنهاد کردند که توابع جی- بسل[25] می‌تواند یک انتخاب مناسب به‌عنوان توابع تقریب در روش تقابل‌دوگانه برای حل مسائل دوبعدی دینامیکی و انتشار موج باشد. در این مطالعه نتایج عددی حاصل از توابع مذکور با نتایج تحلیلی مقایسه شده است

که مبین کارایی بالای این نوع توابع می‌باشد.

یزدی و همکاران (Yazdi et al., 2011) با توسعه معادلات، پایداری روش تقابل دوگانه در مدل‌سازی پدیده انتشار ترک دینامیکی در حوزه زمان را بهبود دادند. مالاردو و علی‌آبادی (Mallardo & Aliabadi, 2011) توانستند با استفاده از روش تقابل‌دوگانه به حل مسئله انتشار موج غیرخطی دوبعدی در حوزه فرکانس بپردازند. در این مطالعه استفاده از توابع تقریب مکانی لگاریتمی برای حل این‌گونه مسائل پیشنهاد شد و نشان دادند که افزایش تعداد نقاط درونی همواره موجب افزایش دقت محاسبات نخواهد بود. سلطانکوهی و همکاران (Soltankoohi et al., 2012) به کمک روش تقابل‌دوگانه به تهیه مدل انتشار موج دینامیکی ناشی از حرکت آب و اثر ناشی از آن بر زیرساخت‌های ساحلی پرداختند. ژو و همکاران (Zhou et al., 2012) از روش تقابل دوگانه برای حل مسائل سه‌بعدی الاستیسیته استفاده کردند و نشان دادند که تابع نمایی می‌تواند یک تابع تقریب پایدار برای مدل‌سازی حفرات و لوله‌های سه‌بعدی باشد. وی و همکاران (Wei et al., 2012) با استفاده از ترکیب روش تقابل‌دوگانه و روش اجزای محدود توانستند با اصلاح ماتریس‌های محاسباتی به تهیه مدل‌های بهینه مسائل دینامیکی بپردازند. یکی از کاربردهای مهم روش تقابل دوگانه امکان مدل‌سازی ساده معادلات کوپل می‌باشد به‌طوری‌که فهمی (Fahmy, 2014) توانست با استفاده از معادلات کوپل ترموالاستیک، انتشار موج دینامیکی در محیط‌های خاک ناهمسان را مدل‌سازی نماید. توسعه روش تقابل‌دوگانه برای مدل‌سازی محیط‌های پروالاستیک نیز انجام پذیرفته است، به‌طوری‌که چانگ و همکاران (Chuang et al., 2015) پدیده انتشار موج را در محیط‌های متخلخل به کمک روش تقابل دوگانه مدل‌سازی نمودند. در این تحقیق از توابع تقریب چندجمله‌ای مکانی بهره گرفته شده است. کاربرد روش تقابل دوگانه برای تحلیل دینامیکی محیط‌های ناپیوسته در مطالعه فو و همکاران (Fu et al., 2015) ارائه شده است. باربوسا و همکاران (Barbosa et al., 2019) از روش تقابل‌دوگانه برای مدل‌سازی مسائل سه‌بعدی دینامیکی استفاده کردند. استفاده از روش‌های هیبرید جهت ترکیب روش اجزای مرزی با تقابل‌دوگانه و سایر روش‌های محاسباتی نظیر روش تقریب شعاعی (RPIM) توسط چانتوارا و کاناخام (Chanthawara & Kaennakham, 2021) گزارش شده است. در مطالعه یو و همکاران (Yu et al., 2021) ضمن توسعه روش تقابل‌دوگانه، شکل جدید از روش مزبور با عنوان روش تقابل‌دوگانه ایزومتریک پیشنهاد شد که برای تحلیل انتقال حرارت دینامیکی مناسب می‌باشد. مهم‌ترین تفاوت این روش با روش‌های متداول تقابل‌دوگانه استفاده از توابع تقریب بی–اسپیلاین[۲۶] در روند تحلیل است. در شکل (۱۱) نحوه انتخاب نقاط درونی برای هندسه‌های درجه دوم برگرفته از این تحقیق نشان داده شده است.

گالویس و همکاران (Galvis et al., 2021) یک نرم‌افزار جامع با نام BESLE، برای تحلیل مسائل مختلف الاستودینامیک خطی به کمک روش تقابل‌دوگانه پیشنهاد دادند. اخیراً ناروائز و یوسچی (Narvaez & Useche, 2022) نیز از یک روش انتگرال‌گیری جدید و بهینه شده در روش تقابل دوگانه استفاده نموده و عملکرد روش را در حل مسائل دینامیکی بهبود دادند. در مطالعه یو و همکاران (Yu et al., 2022) نیز نحوه انتخاب نقاط درونی و اثر نوع تابع تقریب در تحلیل دینامیکی مسائل مختلف به کمک روش تقابل‌دوگانه بهینه شده به کار گرفته شد.



شکل (۱۱): چیدمان نقاط درونی در هندسه‌های درجه دوم در روش تقابل دوگانه (Yu et al., 2021).

۳- جمع‌بندی

در این مقاله به اهم مطالعات انجام شده پیرامون نحوه مدل‌سازی پدیده انتشار موج به کمک روش‌های مرزی و به‌خصوص روش تقابل‌دوگانه پرداخته شد. ضمن اشاره مختصر به مبانی و معادلات حاکم روش‌های مرزی، معادلات روش تقابل دوگانه ارائه شد و نحوه استفاده از حل‌های اساسی استاتیکی در

بطن آن شرح داده شد. در این میان مفهوم تابع تقریب و نقش آن در مدل‌سازی روش تقابل‌دوگانه مورد بررسی قرار گرفت و پیشنهادهای مهم محققان این عرصه در انتخاب تابع تقریب ارائه شد. چنانچه مشاهده شد مهم‌ترین چالش محققان روش‌های مرزی در مدل‌سازی پدیده انتشار موج عمدتاً به مسائل غیرخطی با شرایط مرزی و اولیه پیچیده بازمی‌گردد. با معرفی روش تقابل‌دوگانه بسیاری از این کمبودها برطرف شده و محققان مختلف توانستند به کمک این روش به تحلیل مسائل غیرخطی و هم مسائل مرتبط به شرایط مرزی غیر صفر بپردازند. با این حال از مسائلی که تا به امروز به آن کمتر توجه شده استخراج مؤلفه‌های تانسور تنش و محاسبه توزیع دینامیکی تنش به کمک روش‌های مرزی و به‌خصوص روش تقابل‌دوگانه است؛ زیرا به کمک این روش این امکان فراهم شده تا علاوه بر افزایش کارایی محاسبات دینامیکی، تنش‌های دینامیکی نیز محاسبه شده و توزیع تنش بر حسب زمان تعیین شود. علاوه بر این، اگرچه مدل‌سازی پدیده‌های مرتبط با بارگذاری انفجار و بارگذاری دینامیکی حرکت وسایط نقلیه سنگین نیز به کمک روش تقابل‌دوگانه توسعه داده شده، ولیکن در عمده این مطالعات، سازه‌های زیرسطحی نظیر تونل‌ها کمتر مورد توجه قرار گرفته است. همچنین مدل‌سازی دینامیکی غیرخطی محیط‌های متخلخل، انتشار موج مورب در محیط‌های لایه‌ای، تحلیل مسائل اندرکنش خاک- سازه در ترکیب روش تقابل دوگانه با روش اجزای محدود، از جمله موضوعاتی است که می‌توان به کمک روش تقابل‌دوگانه به ارائه راه‌حل‌های نوین و کارآمد پرداخت. در نهایت مهم‌ترین نتایج تحقیق به شرح زیر جمع‌بندی می‌شوند:

۱. مهم‌ترین چالش روش‌های مرزی در مدل‌سازی پدیده انتشار موج عمدتاً به مسائل غیرخطی با شرایط مرزی و اولیه پیچیده بازمی‌گردد.
۲. در روش تقابل دوگانه با ارائه یک فرمول‌بندی نسبتاً ساده و با فرض نقاط محدود دامنه‌ای این امکان فراهم شد تا مسائل غیرخطی به کمک اجزای مرزی تحلیل شود.
۳. تحقیقات گسترده‌ای پیرامون انتخاب نقاط درونی و توابع تقریب در روش تقابل‌دوگانه صورت گرفته که خلاصه نتایج آن به‌صورت جدول (۱) ارائه شد.
۴. استخراج تانسورهای تنش و توابع تقریب بهینه جهت حل مسئله انتشار موج درون و برون‌صفحه در روش تقابل‌دوگانه کمتر مورد توجه محققان بوده است.
۵. اعمال اثر موج میدان آزاد و مؤلفه‌های انعکاس و انکسار آن در معادلات روش تقابل‌دوگانه از جمله زمینه‌های مهم تحقیقات آتی این روش محسوب می‌شود.

مراجع

References

Aganantiaris, J.P., Polyzos, D., & Beskos, D.E. (1998). Three-dimensional structural vibration analysis by the Dual Reciprocity BEM. *Computational Mechanics, 21*(4-5), 372-381.

Albuquerque, E.L., Sollero, P., & dePaiva, W.P. (2007). The radial integration method applied to dynamic problemsof anisotropic plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering, 23*, 805-818.

Alvarez-Rubio, S., Benito, J.J, Sanchez-Sesma, F.J., & Alarcon, E. (2005). The use of direct boundary element method for gaining insight into complex seismic site response. *Computers and Structures, 83*, 821-835.

Alvarez-Rubio, S., Sanchez-Sesma, F.J., Benito, J.J., & Alarcon, E. (2004). The direct boundary element method: 2D site effects assessment on laterally varying layered media (methodology). *Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 24*, 167-180.

Andrej, T. (2005). *Wave Propagation in Homogeneous Elastic Half-Space Using the Dual Reciprocity Boundary Element Method.* PHD Thesis. Faculty of Civil Engineering of the Ruhr University Bochum.

Antes, H. (1985). A boundary element procedure for transient wave propagations in two-dimensional isotropic elastic media. *Finite Elements in Analysis and Design, 1*, 313-322.

Banaugh, R.P., & Goldsmith. W. (1963). Diffraction of steady acoustic waves by surface of arbitrary shape. *The Journal of the Acoustical Society of America, 35*, 1590-1601.

Cruse, T.A., & Rizzo, F.J. (1968). A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 22*, 244-259.

Cudmani, R.O., & Cudmani, R. (2004). Numerical study of the soil structure interaction during strong earthquakes. *13th World Conference on Earthquake Engineering*, Vancouver, B.C. Canada, 2959, 1-17.

Dominguez, J. (1993). *Boundary Element in Dynamics*. Computational Mechanics Publications. ISBN: 1562521829.

Dominguez, J. (1978). *Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations*. Report R78-20.

Erfaninia, M., Kamalian, M., & Panji, M. (2023). Half-space green's function for lamb's problem as applied in seismic geotechnical engineering. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*.

Eringen, A.C., & and Suhubi, E.S. (1975). *Elastodynamics*. New York: Academic Press.

Fahmy, M.A. (2014). A 2D time domain drbem computer model for magneto-thermoelastic coupled wave propagation problems. *International Journal of Engineering and Technology Innovation, 4*(3), 138-151.

Fahmy, M.A. (2022). 3D boundary element model for ultrasonic wave propagation fractional order boundary value problems of functionally graded anisotropic fiber-reinforced plates. *Advances in Fractional and Fractal Boundary Value Problems in Applied Sciences, 6*(5), 247:257.

Fedelinski, P., Aliabadi, M.H., & Rooke, D.P. (1993). The dual boundary element method in dynamic fracture mechanics. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 12*, 203-210.

Friedman, M.B., & Shaw, R.P. (1962). Diffraction of pulses by cylindrical obstacles of arbitrary cross Section. *Journal of Applied Mechanics, 29*, 40-46.

Fu, G.Y., Ma, G.W., & Qu. X.L. (2015). Dual reciprocity boundary element based block model for discontinuous deformation analysis. *Science China Technological Sciences, 58*, 1575-1586.

Gallego, R., & Dominguez, J. (1990). A unified formulation of two existing time-domain boundary

Banerjee, P.K., & Butterfield, R. (1977). *Boundary Element Method in Geomechanics*. Wiley. London.

Banerjee, P.K., & Butterfield, R. (1981). *Boundary Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill. London.

Barbosa, P., Loeffler, C.F., & Lara, L.O.C. (2019). The direct interpolation boundary element technique applied to three-dimensional scalar free vibration problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 108*, 295-300.

Bednarik, M., Cervenka, M., Lotton, P., & Simon, L. (2019). Analytical solutions for elastic SH-waves propagating through an isotropic inhomogeneous layer. *Composite Structures, 220*, 875-887.

Brebbia, C.A., & Dominguez, J. (1992). *Boundary Elements an Introductory Course*. Computational Mechanics Publications. ISBN: 1562520873.

Carrer, J.A.M., Mansur, W.J., & Vanzuit, R.J. (2009). Scalar wave equation by the boundary element method: a D-BEM approach with non-homogeneous initial conditions. *Comput. Mech., 44*, 31-44.

Chanthawara, K., & Kaennakham, S. (2021). A hybrid shapeless radial basis function applied with the dual reciprocity boundary element method. *WSEAS Transactions on Mathematics, 20*, 159-170.

Choi, C.Y., & Balaras, E. (2009). A dual reciprocity boundary element formulation using the fractional step method for the incompressible Navier–Stokes equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 33*, 741-749.

Chuang, S.H., Yueh, C.Y., & Huang, L.H. (2015). Dual boundary element model coupled with the dual reciprocity method to determine wave scattering by a concentric cylindrical system mounted on a conical shoal. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 56*, 30-38.

Cole, D.M., Kosloff, D.D., & Minster, J.B. (1978). A Numerical Boundary Integral Equation Method for Elastodynamics-I. *Bulletin of the Seismological Society of America, 68*, 1331-1357.

Cruse, T.A. (1968). A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem II. *Journal of mathematical analysis and applications, 22*, 341-355.

Seismology and Earthquake Engineering, 5(2), 35-45.

Kamalian, M., Jafari, M.K., Sohrabi-Bidar, A., & Razmkhah, A. (2008). Seismic response of 2-D semi-sine shaped hills to vertically propagating incident waves: amplification patterns and engineering applications. *Earthquake Spectra, 24*(2), 405-430.

Kamalian, M., Jafari, M.K., Sohrabi-Bidar, A. Razmkhah, A., & Gatmiri, B. (2006). Time-domain two-dimensional site response analysis of non-homogeneous topographic structures by a hybrid BE/FE method. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 26*, 753-765.

Kamiya, N., Andoh, E., & Nogae, K. (1993). Eigenvalue analysis by the boundary element method: new developments. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 12*, 151-162.

Karabalis, D.L., & Beskos, D.E. (1984). Dynamic response of 3-D rigid surface foundation by time domain boundary element method. *Earthquake Engineering Structure Dynamics, 12*, 73-93.

Karabalis, D.L., Spyrakos, C.C., & Beskos, D.E. (1984). *Dynamic Response of Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method in Dynamic Soil-Structure Interaction*. Rotterdam, 19-24.

Kontoni, D.P.N., Beskos, D.E., & Manolis, G.D. (1987). Uniform half-plane elastodynamic problems by an approximate boundary element method. *Soil dyn. Earthquake Eng., 6*, 227-238.

Kontoni, D.P.N., Partridge, P.W., & Brebbia, C.A. (1991). The dual reciprocity boundary element method for the eigenvalue analysis of Helmhoitz problems. *Adv. Eng. Software, 13*(1), 2-16.

Lachat, I.C., & Watson, J.O. (1976). Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional blastostatics. *Int. 1. Num. Meth. Engng., 10*, 991-1005.

Lachat, l.C. (1975). *A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics*. Ph.D. Thesis. Univ. of Southampton.

Lak, M., Marji, M.F., Bafghi, A.Y., & Abdollahipour, A. (2019). A coupled finite difference-boundary element method for modeling the propagation of explosion-induced radial cracks around a wellbore. *Journal of Natural Gas Science and Engineering, 64*, element approaches. *Communications in Numerical Methods in Engineering, 6*, 17-25.

Galvis, A.F., Prada, D.M., Moura, L.S., Zavaglia, C., Foster, J.M., Sollero, P., & Wrobel, L.C. (2021). BESLE: Boundary element software for 3D linear elasticity. *Computer Physics Communications, 265*(108009).

Golberg, M.A., Chen, C.S., Bowman, H., & Power, H. (1998). Some comments on the use of radial basis functions in the dual reciprocity method. *Computational Mechanics, 21*, 141-148.

Grundemann, H. (1989). A general procedure transferring domain integrals onto boundary integrals in BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 6*(4), 214-222.

Hamzeh Javaran, S., Khaji, N., & Noorzad, A. (2011). First kind Bessel function (J-Bessel) as radial basis function for plane dynamic analysis using dual reciprocity boundary element method. *Acta Mech., 218*, 247-258.

Hirai, H. (1988). Analysis of transient response of SH wave scattering in a half space by the boundary element method. *Computational Mechanics Publications, 5*(4), 189-194.

Hsiao, S.S., Chang, J.R., Chang, Ch.M. (2007). Improving the accuracy of drbem wave model by using radial basis function. Paper presented at the *The Seventeenth International Offshore and Polar Engineering Conference*. Lisbon. Portugal. ISOPE-I-07-440.

Jaswon, M.A. (1963). integral equation methods in potential theory I. *Proc. Roy. Soc. Ser. A, 275*, 23-32.

Jaswon, M.A., & Ponter, A.R. (1963). An integral equation solution of the torsion problem. *Proc. Roy. Soc. Ser. A., 273*, 237-246.

Jin, Q., Thompson, D.J., Lurcock, D.E.J., Toward, M.G.R., & Ntotsios, E. (2018). A 2.5D finite element and boundary element model for the ground vibration from trains in tunnels and validation using measurement data. *Journal of Sound and Vibration, 422*, 373-389.

Kamalian, M., Gatmiri, B., & Sohrabi-Bidar, A. (2003). On time-domain two-dimensional site response analysis of topographic structures by BEM. *Journal of* reciprocity method and model superposition. *In Boundary Elements VIII. Vol1.*, Springer-Verlag. Berlin and New York.

Narvaez, A., & Useche, J. (2022). A new radial basis integration method applied to the boundary element analysis of 2D scalar wave equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 136*, 77-92.

Omidvar, B., Rahimian, M., & DorMohammadi, A.A. (2009). Simultaneous analysis of dynamic crack growth and contact of crack faces in single-region boundary element method. *American-Eurasian J. Agric. & Environ. Sci., 5*(2), 273-283.

Panji, M., & Ansari, B. (2017). Transient SH-wave scattering by the lined tunnels embedded in an elastic half-plane. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 84*, 220-230.

Panji, M., Kamalian, M., Marnani, J.A., & Jafari, M.K. (2013). Amplification pattern of semi-sine shaped valleys subjected to vertically propagating incident SH waves. *Jour. of Comp. Meth. in Engin., 32*(2), 87-111.

Panji, M., Kamalian, M., Marnani, J.A., & Jafari, M.K. (2013). Transient analysis of wave propagation problems by half-plane BEM. *Geophysical Journal International, 194*(3), 1849-1865.

Panji, M., Kamalian, M., Marnani, J.A., & Jafari, M.K. (2014). Analysing seismic convex topographies by a half-plane time-domain BEM. *Geophysical Journal International, 197*(1), 591-607.

Panji, M., & Mojtabazadeh Hasanlouyi, S. (2018). Time-history responses on the surface by regularly distributed enormous embedded cavities: Incident SH-waves. *Earthquake Science, 31*(3), 137-153.

Panji, M., & Mojtabazadeh Hasanlouyi, S. (2020). Transient response of irregular surface by periodically distributed semi-sine shaped valleys: Incident SH-waves. *Journal of Earthquake and Tsunami, 14*(1), 1-15.

Panji, M., & Mojtabazadeh Hasanlouyi, S. (2021). Surface motion of alluvial valleys subjected to obliquely incident plane SH-Wave propagation. *Journal of Earthquake Engineering*, 1-26.

Panji, M., Mojtabazadeh Hasanlouyi, S., & Yasemi, F. (2020). A half-plane time-domain BEM for SH-wave scattering by a subsurface inclusion. *Computers &* 41-51.

Liu, H. (2012). A review of recent advances in soil dynamics and geotechnical earthquake engineering. *China Civil Engineering Journal, 45*(5), 148-164.

Love, A.E.H. (1944). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover. New York.

Luco, J.E., & De-Barros, F.C.P. (1994). Dynamic displacement and stress in the vicinity of a cylindrical cavity embedded in a half-space. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 23*, 321-340.

Mallardo, V., & Aliabadi, M.H. (2011). A novel DRBEM application for nonlinear wave propagation. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, 27*, 238-250.

Mansur, W.J., & Brebbia, C.A. (1982). Formulation of the boundary element method for transient problems governed by the scalar wave equation. *Applied Mathematical Modeling, 6*, 307-311.

Martinelli, M., Burghignoli, A., & Callisto, L. (2016). Dynamic response of a pile embedded into a layered soil. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 87*, 16-28.

Matinmanesh, H., & Asheghabadi, M.S. (2011). Seismic analysis on soil-structure interaction of buildings over sandy soil. *Procedia Engineering, 14*, 1737-1743.

Mojtabazadeh, S., Panji, P., & Kamalian, M. (2022). Attenuated orthotropic time-domain half-space BEM for SH-wave scattering problems. *Geophysical Journal International, 229*(3), 1881-1913.

Mojtabazadeh, S., Panji, P., & Kamalian, M. (2022). Scattering attenuation of transient SH-wave by an orthotropic gaussian-shaped sedimentary basin. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 140*, 186-219.

Nardini, D., & Brebbia, C.A. (1983). A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Applied Mathematical Modelling, 7*, 157-162.

Nardini, D., & Brebbia, C.A. (1985). *Boundary Integral Formulation of Mass Matrixes for Dynamic Analysis*. In Topics in Boundary Research. Springer-Verlag. Berlin and New York.

Nardini, D., & Brebbia, C.A. (1986). Transient boundary element electrodynamics using dual bottom. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 36*, 537-550.

Spyrakos. C.C. Beskos. D.E. (1986). Dynamic response of rigid strip foundations by a time-domain boundary element method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering, 23*, 1547-1565.

Stein, E. (2014). History of the finite element method mathematics meets mechanics Part I: engineering developments. The history of theoretical. Mater. *Comput. Mech.*, 399-442.

Sun, L., Fu, Zh., & Chen, Zh. (2023). A localized collocation solver based on fundamental solutions for 3D time harmonic elastic wave propagation analysis. *Applied Mathematics and Computation, 439*, 127600.

Suo-wen, G., Yue-sheng, W., Zi-mao, Z., & Xing-rui, M.A. (2005). Dual reciprocity boundary element method for flexural waves in thin plate with cutout. *Applied Mathematics and Mechanics, 26*(12), 1564-1573.

Symm, G.T. (1963). Integral equation methods in potential theory II. *Proc. Roy. Soc. Ser. A., 275*, 33-46.

Takahashi, Sh. (2013). Analytical solutions for the point source spherical blast wave propagation with $\gamma = 7$. *International Symposium on Shock Waves, 1*, 95-100.

Takahashi, T., Miyazawa, N., & Tanigawa, M. (2022). A three-dimensional shape optimization for transient acoustic scattering problems using the time-domain boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, 124*(2), 482-512.

Tanaka, M., & Chen, W. (2001). Dual reciprocity BEM applied to transient elastodynamic problems with diff erential quadrature method in time. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190*(18-19), 2331-2347.

Tsaur, D.H., & Chang, K.H. (2018). Exact solution to scattering of SH waves by an elliptic-arc canyon in the corner of an elastic quarter space. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 110*, 137-140.

Wei, Y., Wang, Q., Wang, Y., & Huang. Y. (2012). Optimizations for elastodynamic simulation analysis with FMM-DRBEM and CUDA. *CMES, 86*(3), 241-273.

Geosciences, 134, 104342.

Partridge, P.W., & Brebbia, C.A. (1990). Computer implementation of the BEM dual reciprocity method for the solution of general field equations. *Communications in Applied Numerical Methods, 6*, 83-92.

Partridge, P.W., Brebbia, C.A., & Wrobel, L.C. (1992). *The Dual Reciprocity Boundary Element Method.* Computational Mechanics Publications. ISBN: 0945824823.

Polyzos, D., Tisnopoulos, S.V., & Beskos, D.E. (1998). Static and dynamic boundary element analysis in incompressible linear elasticity. *European Journal of Mechanics - A/Solids, 17*(3), 515-536.

Poursartip, B., & Kallivokas, L.F. (2019). Model dimensionality effects on the amplification of seismic waves. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 113*, 572-592.

Reinoso, E., Wrobel, L.C., & Power, H. (1993). Preliminary results of the modelling of the Mexico City valley with a two-dimensional boundary element method for the scattering of SH waves. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 12*, 457-468.

Rizzo, F.J. (1967). An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of Applied Mathematics*, 83-95.

Samaan, M.F., Rashed, Y.F., Ahmed, M.A. (2007). The dual reciprocity method applied to free vibrations of 2D structures using compact supported radial basis functions. *Comput Mech., 41*, 85-105.

Samman, M., & Rashed, Y.F. (2007). Computer methods in applied mechanics and engineering. *International Journal of Solids and Structures, 44*(25-26), 8517-8531.

Sheng, X., Jones, C.J.C., & Thompson, D. (2005). Prediction of ground vibration from trains using the wavenumber finite and boundary element methods. *Journal of Sound and Vibration, 293*(3), 575-586.

Singh, L.P., Ram, S.D., & Singh, D.B. (2011). Analytical solution of the blast wave problem in a non-ideal gas. *Chiness Physical Letters, 28*(11), 114303-1.

Soltankoohi, A.R., Gatmiri, B., & Noorzad, A. (2012). A new application of an improved DRBEM model for water wave propagation over a frictional uneven

Wheeler, L.T., & Sternberg, E. (1968). Some theorems in classical elastodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis, 31*, 87-90.

Wolf, J.P. (1991). Classification of analysis methods for dynamic soil-structure structure interaction. *International Conferences on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics*. Missouri University of Science and Technology Missouri University of Science and T. 1821-1832.

Wrobel, L.C., & Brebbia, C.A. (1987). The dual reciprocity boundary element formulation for nonlinear diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 65*, 147-164.

Yan, F., Feng, X., & Zhou, H. (2010). A dual reciprocity hybrid radial boundary node method based on radial point interpolation method. *Comput Mech., 45*, 541-552.

Yazdi, A.K., Omidvar, B., & Rahimian, M. (2011). Improving the stability of time domain dual boundary element method for three dimensional fracture problems: A time weighting approach. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 35*, 1142-1148.

Yu, Bo., Cao, G., Huo, W., Zhou, H., & Atroshchenko, E. (2021). Isogeometric dual reciprocity boundary element method for solving transient heat conduction problems with heat sources. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 385*(113197), 1-20.

Yu, J., Lei, Z., Yao, Q., Zhou, F., & Pan, X. (2022). A bounded randomly variable shape multi-quadric interpolation method in dual reciprocity boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 134*, 377-387.

Zhang, Q.B., & Zhao, J. (2014). A review of dynamic experimental techniques and mechanical behaviour of rock materials. *Rock Mechanics and Rock Engineering, 47*, 1411-1478.

Zhou, F., Zhang, J., Sheng, X., & Li. G. (2012). A dual reciprocity boundary face method for 3D non-homogeneous elasticity problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 36*, 1301-1310.

Zhu, S.P., Liu, H.W., & Marchant, T.R. (2009). A perturbation DRBEM model for weakly nonlinear wave run-ups around islands. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 33*(1), 63-76.

واژه‌نامه

۱- انتشار موج	Wave Propagation
۲- روش‌های عددی	Numerical Methods
۳- روش‌های حجمی	Volumetric Methods
۴- روش تفاضل محدود	Finite Difference Method (FDM)
۵- روش اجزای محدود	Finite Element Method (FEM)
۶- روش المان‌های مجزا	Distinct Element Method (DEM)
۷- روش‌های مرزی	Boundary Methods
۸- موج اسکالر	Scalar Wave
۹- روش اجزای مرزی	Boundary Element Method
۱۰- نقاط درونی	Internal Points
۱۱- حل اساسی	Fundamental Solution
۱۲- محیط کامل	Full-space BEM (FBEM)
۱۳- محیط نیم‌فضا	Half-space BEM (HBEM)
۱۴- تقابل دوگانه	Dual-Reciprocity BEM (DBEM)
۱۵- روش اجزای مرزی با تقابل دوگانه	Dual Reciprocity Boundary Element Method
۱۶- کانولوشن	Convolution
۱۷- توابع تقریب	Estimator Functions
۱۸- خیام- پاسکال	Khayyam Pascal Triangle
۱۹- سری‌های مثلثاتی	Trigonometric Series
۲۰- فاصله نقطه منبع از میدان	Radial Distance Function
۲۱- انتشار ترک دینامیکی	Dynamic Crack Propagation
۲۲- ناویر- استوکس	Navier–Stokes
۲۳- روش نقطه مرزی	The Hybrid Boundary Node Method
۲۴- روش تقریب شعاعی	Radial Point Interpolation Method
۲۵- توابع جی- بسل	J-Bessel Function
۲۶- توابع بی- اسپیلاین	B-Spline Functions

A Review on Linear Dynamic Analysis by Dual Reciprocity Boundary Element Method

Pouya Kavandi[1], Navid Ganjian[2] and Mehdi Panji[3*]

1. Ph.D. Candidate, Department of Civil Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
2. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
3. Associate Professor, Department of Civil Engineering, Zanjan Branch, Islamic Azad University, Zanjan, Iran,

*Corresponding Author, email: mehdipanji@yahoo.com

Analyzing the problems related to the phenomenon of wave propagation and finding optimal methods to solve it are among the important issues that have been highly regarded by earthquake engineering researchers in recent decades. Major studies related to earthquake effects on seismic sites have shown that the effects of earthquake waves on the site are mainly due to factors such as the type and angle of the impact wave intensity duration and frequency content of the wave and site characteristics such as surface topography and soil layering properties. The development of new equations of wave propagation by considering each of these characteristics is important and over the past years researchers have proposed new methods to solve them. The most important methods in studying the wave propagation phenomenon can be divided into three categories: laboratory methods, physical modeling and mathematical modeling. Laboratory methods are largely consistent with the physical nature of the problems, and their results are more accurate than other methods. Methods such as direct wave propagation on soil resonance column method and piezoelectric method are among the most important laboratory methods in the study of wave propagation phenomenon. However, these methods mainly require the use of precision hardware equipment, which is not always available and their use is not always cost-effective. On the other hand, the mathematical modeling is important. In this category, the most correct equations governing the wave propagation phenomenon are extracted and then solved. The most important advantage of mathematical modeling methods is that they are more cost-effective and the results of their procedures can be extracted very fast. Based on governing equations, the mathematical modeling can be categorized into analytical and numerical methods. In the past, when precise computational tools were not available, the governing equations of each physical phenomenon were solved by considering simple boundary and initial conditions, and formulated answers were only presented to that simple problem. These types of answers are known as analytical solutions. The most important issue of this type of solutions is the lack of accurate answers when other complex problems are considered, so that it is necessary to provide accurate analytical answers again for problems with complex boundary and geometric conditions. In the early twentieth century, with the growth and development of computers and computing tools, another type of method called numerical method was developed. In this method, by discretizing the environment into small components called elements and applying approximate equations to each component, an attempt is made to obtain an approximate answer to the problem. Numerical methods can be divided into two categories based on the type of discretization: volumetric methods and boundary methods. Unlike volumetric methods in which discretization is mainly performed on the domain of the environment in boundary methods, discretization is mainly performed on the boundaries of the environment. For this reason, the computational efforts in boundary methods is significantly less than volumetric methods, and more accurate results can be achieved by spending less computational power. In this research, after reviewing the technical literature and research on the development of boundary methods in modeling the wave propagation phenomenon then the dual reciprocity boundary element method as one of the most widely used branches of boundary methods will be reviewed. Finally, by carefully reviewing the researches, an attempt has been made to report the shortcomings and unknown points of boundary methods in order to promote future researches.

Keywords: Boundary Element Method, Dual Reciprocity, Dynamic Analysis, Numerical Methods, Analytical Approaches.