

نوع مقاله: پژوهشی

چکیده

در مقاله‌ی حاضر، کمانش و ارتعاشات آزاد تیری اولر-برنولی غیرمنشوری بر بستر وینکلر-پاسترناک با دو روش اجزای محدود و رایلی ریتز بررسی می‌شود. برای مدل‌سازی، تغییرات ممان اینرسی و تغییرات مساحت تیر در سه حالت، به صورت تابعی بر حسب ممان اینرسی ابتدایی و مساحت ابتدایی در معادله اعمال می‌شود. برای حل معادله، در گام اول با استفاده از روش همیلتون، معادله دیفرانسیل حاکم استخراج می‌گردد. در گام بعدی، شکل ضعیف معادله دیفرانسیل محاسبه شده و از توابع میان‌یابی هریمیتی (اجزای محدود) و سری توانی (رایلی ریتز) به‌عنوان توابع تغییر مکان عرضی و توابع وزن استفاده می‌گردد. در گام آخر، پس از استخراج ماتریس‌های سختی مصالح، سختی هندسی، ماتریس سختی بستر وینکلر و پاسترناک و ماتریس جرم در نهایت مقادیر ویژه معادله بررسی می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد که افزایش هم‌زمان شیب مقطع β و ثابت فنری وینکلر k_w و ثابت برشی پاسترناک k_p تأثیر قابل توجهی در افزایش ضریب طول مؤثر K و کاهش ظرفیت بار کمانشی P_{cr} در تمامی شرایط مرزی تکیه‌گاهی مختلف دارد. همچنین افزایش هم‌زمان شیب مقطع β و ثابت فنری وینکلر k_w و ثابت برشی پاسترناک k_p بسته به نوع شرایط مرزی تکیه‌گاهی سبب افزایش یا کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد $\bar{\omega}$ می‌گردد. برای کاربردی بودن نتایج در محاسبات مهندسی، از منحنی‌های هم‌تراز برای ارائه‌ی نتایج و نمایش نمودارها استفاده می‌شود. نتایج مقاله با دو روش اجزای محدود و رایلی ریتز صحت‌سنجی و بررسی گردید. تطابق قابل قبولی بین نتایج مقاله‌ی حاضر و پژوهش پیشین برقرار است.

واژگان کلیدی: پایداری، فرکانس طبیعی، اصل همیلتون، اجزای محدود، تحلیل مقدار ویژه.

آنالیز کمانش و ارتعاشات تیر غیر منشوری بر بستر وینکلر-پاسترناک با دو روش اجزای محدود و رایلی ریتز

امیرحسین طاهرخانی

دانش‌آموخته کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش سازه،
دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

مجید امین افشار (نویسنده مسئول)

استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی،
دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) قزوین، ایران،
mj.afshar@eng.ikiu.ac.ir

۱- مقدمه

به حداقل رساندن مصرف مصالح و وزن سازه و افزایش ظرفیت بار بحرانی کمانشی از اعضای با مقطع متغیر در طراحی اعضای سازه‌ای استفاده می‌کنند. در ادامه به پژوهش‌های پیشین در زمینه پایداری ستون‌های غیر منشوری بر بستر الاستیک اشاره می‌شود. نخستین بار تیموشنکو و گر (Timoshenko & Gere, 2009)، وانگ و وانگ (Wang & Wang, 2004)، بازانت و همکاران (Bazant et al., 1993)، مورلی (Morley, 1917) و دینیک (Dinnik, 1932)، به مطالعه ظرفیت بار بحرانی ستون‌های

در تحلیل سازه‌هایی مانند پی ساختمان‌ها، ریل راه‌آهن، مخازن، باند فرودگاه و اسکله‌ها لازم است که اثر بستر الاستیک در مدل‌سازی لحاظ گردد. به همین علت، نظریه‌های متفاوتی از جمله وینکلر، پاسترناک و ریسنر معرفی شده است (Özmutlu, 2008; Zhang, 2008; Ma et al., 2009; Fangshe et al., 2009). از طرفی، یک عضو با مقطع متغیر نسبت به عضو منشوری که دارای سطح مقطع بزرگ‌تری است، از ظرفیت باربری بیشتری برخوردار است. امروزه، مهندسان برای

مستقر بر بستر پاسترناک را مورد بررسی قرار داد. ایشان از روش رایلی ریتز بر مبنای روش حداقل کردن انرژی کل استفاده نمود. نتایج نشان می‌دهد که افزایش نسبت اضلاع ورق، افزایش ضخامت ورق و افزایش ضریب سختی وینکلر باعث افزایش فرکانس می‌شود. ترینه و همکاران (Trinh et al., 2016)، به مطالعه فرکانس طبیعی و ظرفیت بار بحرانی نانو تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بار دینامیکی و حرارتی پرداختند. نتایج نشان می‌دهد که بابایی و بهجت (Babaei & Behjat, 2017) به بررسی بار کمانشی و فرکانس طبیعی نانو تیری بر بستر الاستیک با لحاظ اثرات غیر موضعی پرداختند. سلطانی و عسگریان (Soltani & Asgarian, 2019) به مطالعه پایداری و ارتعاش آزاد ستون‌های غیرمنشوری با استفاده از ترکیب روش سری‌های توانی پرداختند.

نتایج بیانگر آن است که افزایش مقدار ضریب شیب منجر به کاهش سطح مقطع و صلبیت خمشی در طول و به‌خصوص در انتهای دیگر عضو می‌شود و در نتیجه بار کمانش بحرانی کاهش و ناپایداری افزایش می‌یابد. خانیکی و همکاران (Khaniki et al., 2018) و راجاسکاران و بخشی خانیکی (Rajasekaran & Bakhshi Khaniki, 2019) به بررسی پایداری استاتیکی و دینامیکی نانو تیرهای غیرمنشوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر اساس تئوری گرادیان کرنشی پرداختند. آنها با استفاده از روش‌های عددی اثرات تغییر مقطع، جنس مصالح و مقیاس کوچک را بر روی فرکانس طبیعی و بار کمانش تیر اوایلر-برنولی و تیموشنکو مورد بررسی قرار دادند.

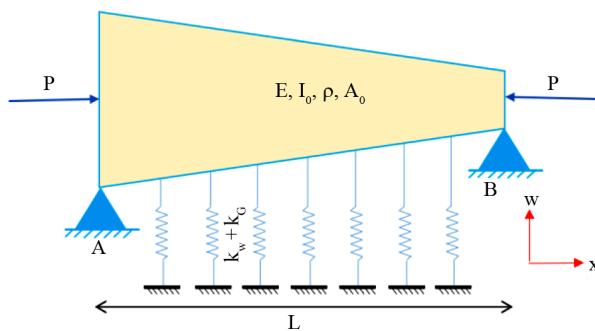
سلطانی (Soltani, 2020) به مطالعه کمانش تیر تیموشنکو مدرج تابعی غیرمنشوری بر بستر وینکلر با روش اجزای محدود پرداخت. نتایج بیانگر این است که افزایش توان ماده تابعی سبب افزایش ضریب بار کمانشی و کاهش ظرفیت بار کمانشی می‌شود. سلطانی و آهنیان (Soltani & Ahanian, 2021)، به بررسی ارتعاشات آزاد و پایداری خمشی-پیچشی تیر جدار نازک ماهیچه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک پرداختند. ایشان، پایداری و ارتعاش آزاد را بر پایه

الاستیک بر مبنای روش‌های حل بسته معادله دیفرانسیل حاکم یا تقریبی عددی پرداختند.

شی‌روننگ و همکاران (Shi-rong et al., 2003)، به مطالعه پاسخ پس کمانش یک تیر الاستیک با دو سر ساده تحت افزایش دمای غیریکنواخت پرداختند. رهایی و کاظمی (Rahai & Kazemi, 2008)، به بررسی کمانش در ستون‌های با مقطع متغیر پلکانی پرداختند. برای حل معادله و بررسی کمانش در مودهای مختلف از روش انرژی استفاده شده است. ریاحی و همکاران (Riahi et al., 2012)، به بررسی پایداری قاب صنعتی با اعضای مقطع متغیر اولر-برنولی بر مبنای روش شیب افت پرداختند. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که با افزایش ضریب شیب قاب‌های شیب‌دار مقدار طول مؤثر افزایش و ظرفیت بار کمانشی کاهش می‌یابد. پینارباسی (Pinarbasi, 2012)، به تحلیل بار کمانشی ستون‌های نامنشوری با تکیه‌گاه‌های ارتجاعی پرداخت. وی از روش تکرار متغیر برای حل معادله متشکل استفاده کرد.

تغییرات سختی به دو صورت نمایی و خطی در نظر گرفته شده است. حدیدی و همکاران (Hadidi et al., 2014)، به تحلیل غیرخطی مرتبه دوم تیرهای با مقطع متغیر پرداختند. ایشان از روش سری‌های توانی برای حل معادله متشکله بهره گرفته‌اند. اثر بارهای متمرکز در طول تیر را نیز در نظر گرفتند. سالمی و همکاران (Hadidi et al., 2014) با استفاده از روش رایلی-ریتز به تحلیل تیر اوایلر-برنولی غیر محلی متکی بر بستر الاستیک-پاسترناک پرداختند و تأثیر حرارت، شرایط مرزی مختلف، سختی بستر الاستیک و پارامتر غیر محلی را مورد بررسی قرار دادند. ذاکری و همکاران (Zakeri et al., 2014) به تحلیل ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو متکی بر بستر ارتجاعی با استفاده از روش عددی DTEM پرداختند. در مدل ایشان، توزیع مدول الاستیسیته و چگالی به صورت یک چند جمله‌ای در طول تیر تغییر می‌کند.

خورشیدی و همکاران (Khorshidi et al., 2016) تأثیرات محیط حرارتی بر ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی مدرج دوبعدی



شکل (۱): تیر با مقطع متغیر بر بستر وینکلر - پاسترناک.

۲-۱- اعضای با مقطع غیر منشوری

در اعضای غیرمنشوری به دلیل غیر ثابت بودن مقادیر طول و عرض، گشتاور دوم سطح مقطع و مساحت مقطع در حال تغییر هستند. جهت اعمال اثر غیریکنواختی مقطع، I_0 و A_0 به ترتیب سطح مقطع بزرگ‌تر در ابتدای عضو و ممان اینرسی آن است.

x فاصله هر نقطه از تیر، L طول تیر، β شیب مقطع، b عرض، h ارتفاع مقطع و $\bar{x} = x/L$ فاصله بی‌بعد هر نقطه از تیر هستند. ضریب β مقادیری از صفر تا 0.9 را دارد (Soltani & Asgarian, 2019).

معادلات حاکم بر تغییرات مساحت و ممان اینرسی بی‌بعد مقطع در سه حالت ذیل بررسی می‌شود.

در حالت اول، عرض مقطع مستطیلی به صورت خطی کاهش می‌یابد؛ اما ارتفاع مقطع ثابت است.

$$\bar{A}(\bar{x}) = A_0(1 - \beta\bar{x}) \quad (1)$$

$$\bar{I}(\bar{x}) = I_0(1 - \beta\bar{x})$$

در حالت دوم، ارتفاع مقطع در امتداد عضو با شیب β کاهش می‌یابد؛ اما عرض مقطع ثابت است.

$$\bar{A}(\bar{x}) = A_0(1 - \beta\bar{x}) \quad (2)$$

$$\bar{I}(\bar{x}) = I_0(1 - \beta\bar{x})^3$$

در حالت سوم، ارتفاع و عرض مقطع مستطیلی در امتداد طول عضو و با شیب β به صورت هم‌زمان کاهش می‌یابد.

$$\bar{A}(\bar{x}) = A_0(1 - \beta\bar{x})^2 \quad (3)$$

$$\bar{I}(\bar{x}) = I_0(1 - \beta\bar{x})^4$$

مدل ولاسو برای مقاطع جدار نازک باز و با اعمال اثرات محل اتصال بستر الاستیک و خروج از مرکزیت بار فشاری در معادلات بررسی کردند.

در مقاله حاضر، ارتعاشات و پایداری تیری غیرمنشوری بر بستر وینکلر- پاسترناک بررسی می‌شود. تغییرات ممان اینرسی و تغییرات مساحت تیر در سه حالت به صورت تابعی بر حسب ممان اینرسی ابتدایی و مساحت ابتدایی در معادله اعمال می‌شود. اثر جابه‌جایی و فشار قائم خاک توسط فنرهای ارتجاعی مطابق مدل وینکلر و تغییر شکل‌های برشی مطابق مدل پاسترناک لحاظ می‌شود. برای حل معادله دیفرانسیل از روش عددی‌های اجزای محدود و رایلی ریتز استفاده می‌شود. در روش اجزای محدود از توابع میان‌یابی هرمیتی درجه سوم و در روش رایلی ریتز از سری چند جمله‌ای توانی به عنوان تابع شکل برای حل معادله استفاده می‌شود. در نهایت، برای حل معادله یافتن پارامترهای پاسخ از جمله (فرکانس طبیعی بی‌بعد و ضریب طول مؤثر) از روش‌های حل مقادیر ویژه استفاده می‌شود. در مبحث نهم و دهم مقررات ملی ساختمان روابطی برای بررسی پایداری و ارتعاشات تیرهای غیرمنشوری بر بستر وینکلر- پاسترناک ارائه نشده است.

در این مقاله، از منحنی‌های هم‌تراز برای ارائه نتایج استفاده می‌شود. نتایج مقاله حاضر به عنوان تحقیق کاربردی برای استفاده مهندسان و طراحان جهت طراحی تیرهای غیرمنشوری بر بستر وینکلر - پاسترناک قابل استفاده است (BHRC, 2020, 2022).

۲- مدل سازی مسئله

مطابق شکل (۱) تیری الاستیک غیرمنشوری بر بستر وینکلر- پاسترناک با مشخصات گشتاور دوم سطح $I(x)$ ، مدول الاستیسیته E ، جرم واحد طول $\rho \times A(x)$ ، طول L ، سطح مقطع $A(x)$ ، جرم مخصوص ρ ، ثابت برشی نوع پاسترناک و k_w ثابت فنی نوع وینکلر در نظر گرفته می‌شود. در این مدل، P بار کماتش بحرانی است.

۲-۲- استخراج معادله دیفرانسیل حرکت بر مبنای روش همیلتون

در این بخش با استفاده از روش انرژی و اصل حساب تغییرات، معادله متشکله مجموعه مورد نظر استخراج می‌گردد. بدین منظور باید اصل کار برای کارهای (جنبشی- پتانسیل) ناشی از (اینرسی در واحد طول تیر، بار کمانش محوری، اثر بستر وینکلر- پاسترناک و انرژی کرنشی تیر) نوشته شود. مطابق تئوری تیر اوپلر- برنولی، فرضیه‌های زیر برقرار هستند. الف) سطح مقطع تیر بعد از تغییر شکل مسطح باقی می‌ماند؛ یعنی تیر دارای یک تغییر مکان در پلان $x-z$ و یک دوران حول محور y است.

ب) از اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی در پلان $x-z$ صرف نظر می‌شود.

ج) زاویه دوران کوچک بوده به گونه‌ای که فرضیه زوایای کوچک صادق است. بدین ترتیب، برای تیر اوپلر- برنولی میدان‌های جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\phi(x,z,t) = -z \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \quad (4)$$

$$w(x,z,t) = W(x,t) \quad (5)$$

در روابط فوق فرض می‌گردد که محورهای x و z به ترتیب در جهت طول و ضخامت هستند و z نسبت به تار خشی اندازه‌گیری می‌شود. W معرف جابه‌جایی عرضی تیر است.

کرنش عرضی بر حسب جابه‌جایی عرضی به صورت رابطه‌ی زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{zz}(x,z) = \gamma_{xz}(x,z) = 0 \quad (7)$$

در رابطه‌ی فوق ε_{xx} بیانگر کرنش نرمال ایجاد شده در تیر است. با استفاده از اصل حساب تغییرات، تغییر در کار ناشی از انرژی کرنشی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\delta U = \int_0^{t_f} \left[\int_0^L \int_0^A \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dA dx \right] dt \quad (8)$$

که t_f زمان نهایی است. روابط تنش- کرنش مطابق قانون هوک به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (9)$$

با جایگذاری معادلات (۶) و (۹) در رابطه (۸) و انتگرال‌گیری جزء به جزء، انرژی کرنشی تیر به صورت رابطه (۱۰) بیان می‌شود.

$$U = - \int_0^{t_f} \left[\int_0^L EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx \right] dt = \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \delta W - EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) \right\} dt \quad (10)$$

$$\int_0^{t_f} \left[\int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \delta W dx \right] dt$$

انرژی جنبشی ناشی از اینرسی در طول واحد تیر به صورت زیر نوشته می‌شود

$$T = \int_0^L \left[\int_0^{t_f} \frac{1}{2} \rho A(x) \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dt \right] dx \quad (11)$$

با اعمال عملگر تغییرات و انتگرال‌گیری جزء به جزء، تغییر در انرژی جنبشی به صورت رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\delta T = \int_0^L \rho A(x) \left[\frac{\partial W}{\partial t} \delta W \right]_0^{t_f} dx - \int_0^L \left[\int_0^{t_f} \rho A(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \delta W dt \right] dx \quad (12)$$

انرژی ناشی از نیروی خارجی بار کمانش محوری به صورت زیر بیان می‌شود.

$$V_1 = - \int_0^{t_f} \left[\int_0^L \frac{1}{2} P \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx \right] dt \quad (13)$$

با اعمال عملگر تغییرات و انتگرال‌گیری جزء به جزء، تغییر در کار ناشی از بار کمانش محوری به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$\delta V_1 = - \int_0^{t_f} P \left[\frac{\partial W}{\partial x} \delta W \right]_0^L dt + \int_0^L \left[\int_0^{t_f} P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta W dt \right] dx \quad (14)$$

انرژی ناشی از نیروی بستر الاستیک - پاسترناک به صورت رابطه (۱۵) بیان می‌شود.

مبنای روش انرژی به صورت زیر بیان می شود. $W(x,t)$ برابر با خیز جانبی تیری مورد نظر است.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) + P \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + k_p \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - k_w W = 0 \quad (19)$$

شرایط مرزی برای هر دو انتهای اعضای تحلیل شده به صورت زیر تعریف می گردند.
مفصلی- مفصلی:

$$W(0,t) = 0, \quad W(L,t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 W(0,t)}{\partial x^2} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial x^2} \right) = 0$$

گیردار- مفصلی:

$$W(0,t) = 0, \quad W(L,t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial W(0,t)}{\partial x} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial W(L,t)}{\partial x} \right) = 0$$

گیردار- آزاد: (20)

$$W(0,t) = 0, \quad \left(\frac{\partial W(0,t)}{\partial x} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial x^2} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial x^3} \right) = 0$$

گیردار- گیردار:

$$W(0,t) = 0, \quad \left(\frac{\partial W(0,t)}{\partial x} \right) = 0$$

$$W(L,t) = 0, \quad \left(\frac{\partial W(L,t)}{\partial x} \right) = 0$$

در معادله (19) پارامتر خیز جانبی $W(x,t)$ تیری مطابق اصل جداسازی متغیرها، به صورت ضرب $W(x)$ (پارامتر تابع شکل) در $T(t)$ (پارامتر تابع زمانی) در نظر گرفته می شود.

$$T(t) = e^{i\omega t} \quad (21)$$

$$W(x,t) = w(x)T(t) \quad (22)$$

با جایگذاری معادله های (22) در معادله (19)، معادله (19) به صورت زیر بیان می شود.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \rho A(x) \omega^2 w + P \frac{d^2 w}{dx^2} + k_p \frac{d^2 w}{dx^2} - k_w w = 0 \quad (23)$$

$$k_p \frac{d^2 w}{dx^2} - k_w w = 0$$

$$V_2 = -\frac{1}{2} \int_0^L \left(k_p \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - k_w W \right) dx \quad (15)$$

$$V_2 = -\int_0^L \left(k_p \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - k_w W \right) \delta W dx$$

با استفاده از حساب تغییرات و اصل بقای انرژی و اعمال شرایط مرزی طبیعی و زمانی، روابط زیر نتیجه می شوند.

$$\delta \pi = \delta T - \delta U - \delta V =$$

$$-\int_0^{t_f} \int_0^L \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + k_p \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - k_w W + P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \delta W dx dt +$$

$$\int_0^L \rho A(x) \left[\frac{\partial u}{\partial t} \delta W \right]_0^{t_f} dx - \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \delta W -$$

$$EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) \right\}_0^L dt + \int_0^{t_f} P \left[\frac{\partial W}{\partial x} \delta W \right]_0^L dt = 0$$

بنابراین معادله (16) شامل دو بخش است. در بخش اول معادله دیفرانسیل حاکم بر عضو و در بخش دوم شرایط مرزی مسئله استخراج شده است. شرایط مسئله با توجه به شکل (1) در تابع شکل اعمال می شود. معادله دیفرانسیل طبق رابطه زیر می باشد.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + p \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + k_p \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - k_w W = 0 \quad (17)$$

برای شرایط مرزی دو سر مفصلی (شکل 1)، روابط (18)

برای شرایط مرزی هندسی و زمانی حاصل می شوند.

$$M(x=0) = \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$M(L,t) = \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (18)$$

$$w(0,t) = w(L,t) = 0$$

$$w(x,0) = w(x,t_f) = 0$$

۳-۲- معادله دیفرانسیل تیری با مقطع متغیر بر بستر وینکلر- پاسترناک

معادله دیفرانسیل تیری مورد نظر با اثر انرژی کرنشی، جرم در واحد طول، بار محوری و اثر بستر وینکلر- پاسترناک بر

با توجه به اینکه در معادله (۲۶) چهار شرط در یک جز (برای هر گره دو عدد) برقرار است، ایجاب می‌کند که توابع میان‌یابی یک جز دارای مشتقات غیر صفر و تا مرتبه دو پیوسته باشند. انتخاب توابع میان‌یابی از نوع درجه سوم هرمیتی (با پیوندی درجه سه) برای حل معادله استفاده می‌شود (در این معادله L_e برابر با طول هر جز است). جملات توابع میان‌یابی از نوع درجه سوم هرمیتی به شرح ذیل است:

$$\bar{w}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^4 (c_j \phi_j^e) \cdot \phi(\bar{x}) = \sum_{j=1}^4 (\phi_j^e) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{(L_e - x)^2 (L_e + 2x)}{L_e^3} \\ \phi_2 &= -\frac{x (L_e - x)^2}{L_e^2} \\ \phi_3 &= \frac{x^2 (3L_e - 2x)^2}{L_e^3} \\ \phi_4 &= \frac{x^2 (L_e - x)}{L_e^2} \end{aligned} \quad (28)$$

با جایگذاری روابط (۲۷) و (۲۸) در رابطه (۲۶) و با استفاده از ویژگی روش اجزای محدود، در نهایت ماتریس‌های سختی به صورت رابطه (۲۹) نوشته می‌شوند.

$$\begin{aligned} K_{ij}^e(s_1) &= \int_{x_c}^{x_{c+1}} \bar{I}(\bar{x}) \left(\frac{d^2 \phi_i^e}{d\bar{x}^2} \right) \left(\frac{d^2 \phi_j^e}{d\bar{x}^2} \right) dx \\ K_{ij}^e(s_2) &= -\int_{x_c}^{x_{c+1}} \bar{k}_p \phi_i^e \left(\frac{d^2 \phi_j^e}{d\bar{x}^2} \right) dx \\ K_{ij}^e(s_3) &= \int_{x_c}^{x_{c+1}} \bar{k}_w \phi_i^e \phi_j^e dx \\ K_{ij}^e(G) &= \int_{x_c}^{x_{c+1}} \left(\frac{d\phi_i^e}{d\bar{x}} \right) \left(\frac{d\phi_j^e}{d\bar{x}} \right) dx \\ M_{ij}^e &= \int_{x_c}^{x_{c+1}} \bar{A}(\bar{x}) \phi_i^e \phi_j^e dx \end{aligned} \quad (29)$$

که در آن $K_{ij}^e(s_1)$ و $K_{ij}^e(s_2)$ و $K_{ij}^e(s_3)$ و $K_{ij}^e(G)$ و M_{ij}^e به ترتیب معرف ماتریس‌های جزء سختی مصالح، سختی ثابت فنری وینکلر، سختی ثابت برشی پاسترناک، سختی هندسی، جرم تیر است.

ماتریس‌های سختی تیر از تجمیع ماتریس سختی اعضا محاسبه می‌شوند. M ، $K_{(G)}$ ، $K_{(s)}$ و X به ترتیب معرف ماتریس‌های

برای تعمیم‌پذیری پاسخ‌های معادله دیفرانسیل فوق از بی‌بعدسازی پارامترها استفاده می‌شود. پارامترهای بی‌بعد هندسی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{x}{L} \cdot \bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho A_0 L^4}{EI_0}} \cdot \bar{w} = \frac{w}{L} \\ \bar{P} = \frac{PL^2}{EI_0} \cdot \bar{k}_p = \frac{k_p L^2}{EI_0} \cdot \bar{k}_w = \frac{k_w L^4}{EI_0} \end{aligned} \quad (24)$$

۴-۲- حل معادله با روش اجزای محدود

در بخش قبل معادله حاکم بر مجموعه (۱۹) و شرایط مرزی مسئله (۲۰) ارائه شد. در این بخش با استفاده از روش اجزای محدود معادله مذکور بررسی می‌شود. بدین منظور لازم است ابتدا شکل ضعیف معادله تشکیل شود. در گام بعدی، از توابع میان‌یابی هرمیتی برای استخراج ماتریس‌های عضو استفاده می‌گردند.

۵-۲- شکل ضعیف شده معادله مشکله

در پژوهش حاضر از روش اجزای محدود برای حل معادله مشکله استفاده می‌شود. در این روش، تابع باقیمانده $R(\bar{x})$ در تابع وزنی $\phi(\bar{x})$ ضرب شده و از حاصل آن انتگرال‌گیری می‌شود. پاسخ به صورت معادله نمایش داده می‌شود. در این رابطه تابع وزن $\phi(\bar{x})$ است که باید نسبت به x حداقل دوبار مشتق‌پذیر باشد.

$$\int_0^1 \phi(\bar{x}) R(\bar{x}) dx \quad (25)$$

$$R(\bar{x}) = \frac{d^2}{d\bar{x}^2} \left(\bar{I}(\bar{x}) \frac{d^2 \bar{w}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \right) - \bar{A}(\bar{x}) \bar{\omega}^2 \bar{w}(\bar{x}) +$$

$$\bar{P} \frac{d^2 \bar{w}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + \bar{k}_p \frac{d^2 \bar{w}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} - \bar{k}_w \bar{w}(\bar{x})$$

معادله (۲۵) دو بار انتگرال‌گیری جزء به جزء گردیده تا دومرتبه مشتق‌گیری با تابع وزن $\phi(\bar{x})$ مبادله گردد و دو مرتبه مشتق‌گیری روی متغیر وابسته $\bar{w}(\bar{x})$ باقی بماند. در نهایت شکل ضعیف معادله به شکل رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \Pi = \\ \int_0^1 \left[\bar{I}(\bar{x}) \left(\frac{d^2 \phi}{d\bar{x}^2} \right) \left(\frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \right) - \bar{P} \left(\frac{d\phi}{d\bar{x}} \right) \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \right) - \bar{\omega}^2 \bar{A}(\bar{x}) \times \right. \\ \left. \bar{w}(\bar{x}) \phi(\bar{x}) - \bar{k}_p \bar{w}(\bar{x}) \left(\frac{d^2 \phi}{d\bar{x}^2} \right) + \bar{k}_w \bar{w}(\bar{x}) \phi(\bar{x}) \right] d\bar{x} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

در رابطه (۳۴)، c_j ماتریس بردار ویژه، N تعداد جملات سری، m_1 و m_2 پارامتری وابسته به نوع تکیه گاه است. m_1 و m_2 برای تکیه گاه ساده برابر ۱ و برای تکیه گاه گیردار برابر ۲ است.

در روش رایلی- ریتز تابع وزن $\varphi(x)$ نیز برابر تابع تغییر مکان عرضی در نظر گرفته می شود.

$$\varphi(x) = x^{m_1} (L-x)^{m_2} \sum_{j=1}^N c_j x^{j-1} \quad (35)$$

روش رایلی- ریتز به صورت رابطه (۳۶) بیان می شود.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_j} = 0 \quad (36)$$

با جایگذاری روابط (۳۴) و (۳۵) در رابطه (۱۹) و با استفاده از ویژگی روش رایلی- ریتز (۳۶)، در نهایت ماتریس های سختی همانند روش اجزای محدود به صورت رابطه (۲۹) نوشته می شوند.

روش های اجزای محدود و رایلی ریتز جزو روش های عددی محسوب می شوند. دقت روش اجزای محدود به وسیله ی افزایش جزء های تیر و تجمع ماتریس های سختی جزء افزایش می یابد؛ اما در روش رایلی ریتز، دقت حل معادله به وسیله ی افزایش تعداد جملات سری توانی افزایش می یابد.

۳- بحث روی نتایج

روابط (۳۱) و (۳۲) روابط مورد نظر برای محاسبه فرکانس طبیعی بی بعد و بار کماتشی بی بعد هستند و برای حل لازم است مقادیر مذکور به وسیله محاسبه دترمینان ماتریس ضرایب محاسبه شوند. همان طور که اشاره شد از روش اجزای محدود برای محاسبه تابع شکل معادله استفاده می شود. در روش های عددی افزایش دقت محاسبات به وسیله افزایش تعداد اجزاء انجام می شود. به همین منظور معادله (۱۹) به ازای ۵۰ جزء بررسی می شود. تمامی مراحل فوق از جمله محاسبه ماتریس سختی و دترمینان ماتریس (مقدار ویژه) به وسیله کدنویسی در نرم افزار متلب (MATLAB) انجام می شود.

سختی مصالح (تجمع ماتریس سختی مصالح، بستر وینکلر و پاسترناک)، سختی هندسی، جرم و بردارهای ویژه است.

$$([K_s] - \bar{\omega}^2 [M])\{X\} = 0 \quad (30)$$

رابطه (۳۰)، رابطه مورد نظر برای محاسبه مقدار ضریب فرکانس طبیعی بی بعد است. رابطه مذکور از نوع مقدار ویژه است. برای حل لازم است از روش های ریشه یابی عددی استفاده شود.

$$|[K_s] - \bar{\omega}^2 [M]| = 0 \quad (31)$$

به طور مشابه رابطه مورد نظر برای محاسبه بار کماتشی تیری به این صورت بیان می شود.

$$|[K_s] - \bar{P}_{cr} [M_G]| = 0 \quad (32)$$

برای تعمیم پذیری نتایج به محاسبات مهندسی به جای پارامتر ظرفیت بار بحرانی P_{cr} از پارامتر ضریب طول مؤثر K برای ارائه نتایج پژوهش حاضر استفاده می شود. ضریب طول مؤثر همان فاصله بین دونقطه عطف متوالی در شکل خمیده تیر مقید ناشی از کماتش است. پارامتر مذکور پارامتری بی بعد بوده و فقط تابع شرایط مرزی مختلف تکیه گاهی است.

$$K = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_0}{P_{cr} L^2}} \quad (33)$$

۲-۶- حل معادله با روش رایلی- ریتز

در بخش (۲-۴) از روش اجزای محدود با توابع میان یابی از نوع درجه سوم هریتی (با پیوندی درجه سه) برای حل معادله استفاده گردید. برای اعتبارسنجی نتایج مقاله ی حاضر، در این بخش از روش رایلی ریتز با چند جمله ای سری توانی به عنوان راه حل دوم برای حل معادله متشکله استفاده می شود.

برای حل معادله (۱۹) باید معادله تغییر مکان عرضی را حدس زد به طوری که شرایط مرزی را ارضا کند. در مقاله حاضر، از سری های چند جمله ای سری توانی به عنوان تابع تغییر مکان عرضی استفاده می شود.

$$w(x) = x^{m_1} (L-x)^{m_2} \sum_{j=1}^N c_j x^{j-1} \quad (34)$$

۳-۱- اعتبارسنجی نتایج

نخست برای اعتبارسنجی نتایج حاصل از این پژوهش، به مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با مدل‌های ارائه شده توسط محققین پرداخته می‌شود. همان‌طور که بیان شد، سلطانی و عسگریان (Soltani & Asgarian, 2019) به مطالعه پایداری و ارتعاش آزاد تیرهای غیرمنشوری با استفاده از ترکیب روش سری‌های توانی پرداختند. همچنین در بخشی از کتاب وانگ و وانگ (Wang & Wang, 2004)، ظرفیت بار کمانشی تیر الاستیک با مقطع متغیر با استفاده از روش‌های تحلیلی بررسی شده است. در مقاله‌ی حاضر به بررسی ظرفیت بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری با مقطع متغیر بر بستر وینکلر-پاسترناک با روش اجزای محدود پرداخته می‌شود. از نتایج تحقیق‌های نامبرده برای صحت‌سنجی مقاله حاضر استفاده می‌شود. بدین منظور، باید اثرات بستر الاستیک در مقاله حاضر نادیده گرفته شود. در این مقاله، S-S معرف شرایط مرزی دو سر مفصلی، C-S معرف شرایط مرزی گیردار-مفصلی، C-C معرف شرایط مرزی دوسرگیردار و C-F بیانگر شرایط مرزی گیردار-آزاد است.

در جدول (۱) مقادیر ظرفیت بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری با تغییرات (خطی، مکعبی و مرتبه چهارم) ممان اینرسی بررسی می‌شود. مشخص است که نتایج مقاله حاضر با تحقیق‌های پیشین تطابق قابل قبولی دارد. چنانچه در روش پیشنهادی مقادیر ویژه به‌ازای پنج جزء محاسبه گردد، مقادیر ظرفیت بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد حداکثر ۱/۰۹ و ۱/۱۵ درصد خطا دارند. در صورتی که مقادیر ظرفیت بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌ازای ۵۰ جزء بررسی شوند. مقدار خطا حداکثر Δ_{max} به صفر میل می‌کند. در بخشی دیگر از صحت‌سنجی، ظرفیت بار کمانشی و فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر غیرمنشوری بر بستر وینکلر-پاسترناک به دو روش رالی ریتز و اجزای محدود بررسی می‌شود. مطابق جداول (۲) الی (۴) مقادیر ظرفیت بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر غیرمنشوری بر بستر وینکلر-پاسترناک با دو روش اجزای محدود و رالی ریتز بررسی می‌شود. مشخص است که سرعت همگرایی پاسخ در روش رالی ریتز نسبت به روش اجزای محدود بالاتر است و تنها به‌ازای سری چند جمله‌ای توانی مرتبه‌ی دهم دقت مورد نظر حاصل می‌شود.

جدول (۱): مقادیر بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تیری با مقطع متغیر (تغییرات خطی، مکعبی و مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی) با شرایط مرزی مختلف.

نتایج جدید			Soltani & Asgarian (2019)	نتایج جدید			Wang & Wang (2004)	B	شرایط مرزی
$\bar{\omega}$			$\bar{\omega}$	\bar{P}_{cr}			\bar{P}_{cr}	(شیب مقطع)	
N=۵۰	N=۱۰	N=۵		N=۵۰	N=۱۰	N=۵			
تغییرات خطی ممان اینرسی									
۹/۸۶۸	۹/۸۶۸	۹/۸۷۰	۹/۸۶۸	۹/۳۷۲	۹/۳۷۲	۹/۳۷۳	۹/۳۷۲	۰/۱	
۹/۸۶۰	۹/۸۵۷	۹/۸۵۶	۹/۸۶۰	۸/۳۴۳	۸/۳۴۳	۸/۳۴۱	۸/۳۴۳	۰/۳	S-S
۹/۸۲۵	۹/۸۲۵	۹/۸۱۸	۹/۸۲۵	۷/۲۵۶	۷/۲۵۴	۷/۲۴۴	۷/۲۵۶	۰/۵	
۱۵/۵۲۷	۱۵/۵۲۵	۱۵/۱۵۲	۱۵/۵۲۷	۱۹/۱۶۸	۱۹/۱۶۶	۱۹/۱۷۱	۱۹/۱۶۸	۰/۱	
۱۵/۷۶۸	۱۵/۷۶۰	۱۵/۷۳۹	۱۵/۷۶۸	۱۷/۰۳۵	۱۷/۰۲۶	۱۷/۰۱۰	۱۷/۰۳۵	۰/۳	C-S
۱۶/۰۴۴	۱۶/۰۲۸	۱۵/۹۸۴	۱۶/۰۴۴	۱۴/۷۳۹	۱۴/۷۳۲	۱۴/۶۸۰	۱۴/۷۳۹	۰/۵	
۳/۶۳۱	۳/۶۳۰	۳/۶۲۶	۳/۶۳۱	۲/۳۹۳	۲/۳۹۲	۲/۳۹۱	۲/۳۹۳	۰/۱	
۳/۹۱۶	۳/۹۱۴	۳/۸۹۸	۳/۹۱۶	۲/۲۳۵	۲/۲۳۴	۲/۲۳۰	۲/۲۳۵	۰/۳	C-F
۴/۳۱۵	۴/۳۰۵	۴/۲۷۵	۴/۳۱۵	۰/۰۶۲	۲/۰۶۰	۲/۰۵۴	۲/۰۶۲	۰/۵	
۰	۰/۱	۰/۴۶	-	۰	۰/۰۹	۰/۳۹	-	-	Δ_{max}

ادامه جدول (۱).

نتایج جدید			Soltani & Asgarian (2019)	نتایج جدید			Wang & Wang (2004)	B (شیب مقطع)	شرایط مرزی
$\bar{\omega}$			$\bar{\omega}$	\bar{P}_{cr}			\bar{P}_{cr}		
N=50	N=10	N=5		N=50	N=10	N=5			
تغییرات مکعبی ممان اینرسی									
۹/۳۶۸	۹/۳۶۸	۹/۳۶۹	۹/۳۶۸	۸/۴۳۶	۸/۴۳۶	۸/۴۳۷	۸/۴۳۶	۰/۱	
۸/۳۰۲	۸/۳۰۳	۸/۳۰۸	۸/۳۰۲	۵/۸۴۰	۵/۸۴۲	۵/۸۴۸	۵/۸۴۰	۰/۳	S-S
۷/۱۲۲	۷/۱۲۶	۷/۱۳۹	۷/۱۲۲	۳/۶۲۸	۳/۶۳۳	۳/۶۴۵	۳/۶۲۸	۰/۵	
۱۴/۸۴۹	۱۴/۸۴۲	۱۴/۸۲۵	۱۴/۸۴۹	۱۷/۲۵۲	۱۷/۲۴۵	۱۷/۲۳۵	۱۷/۲۵۲	۰/۱	
۱۳/۶۴۰	۱۳/۶۲۴	۱۳/۵۸۰	۱۳/۶۴۰	۱۱/۸۲۳	۱۱/۹۱۴	۱۱/۸۸۸	۱۱/۹۲۳	۰/۳	C-S
۱۲/۳۰۰	۱۲/۲۸۲	۱۲/۲۳۰	۱۲/۳۰۰	۷/۳۶۲	۷/۳۶۱	۷/۳۵۱	۷/۳۶۲	۰/۵	
۳/۵۵۹	۳/۵۵۶	۳/۵۵۰	۳/۵۵۹	۲/۲۴۶	۲/۲۴۵	۲/۲۴۳	۲/۲۴۶	۰/۱	
۳/۶۶۷	۳/۶۶۰	۳/۶۴۰	۳/۶۶۷	۱/۷۹۸	۱/۷۹۶	۱/۷۹۲	۱/۷۹۸	۰/۳	C-F
۳/۸۲۴	۳/۸۱۳	۳/۷۸۰	۳/۸۲۴	۱/۳۳۶	۱/۳۳۶	۱/۳۳۵	۱/۳۳۶	۰/۵	
۰	۰/۲۹	۱/۱۸	-		۰/۰۸	۰/۳۳	-	-	Δ_{max}
تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی									
۹/۳۶۲	۹/۳۶۳	۹/۳۶۴	۹/۳۶۲	۷/۹۹۴	۷/۹۹۵	۷/۹۹۸	۷/۹۹۴	۰/۱	
۸/۲۵۰	۸/۲۵۲	۸/۲۵۸	۸/۲۵۰	۴/۸۳۶	۴/۸۴۰	۴/۸۵۲	۴/۸۳۶	۰/۳	S-S
۶/۹۵۸	۶/۹۶۳	۶/۹۸۲	۶/۹۵۸	۲/۴۶۷	۲/۴۷۷	۲/۵۰۰	۲/۴۶۷	۰/۵	
۱۴/۹۵۵	۱۴/۹۴۶	۱۴/۹۲۲	۱۴/۹۵۵	۱۶/۳۵۴	۱۶/۳۴۷	۱۶/۳۳۲	۱۶/۳۵۴	۰/۱	
۱۳/۹۶۲	۱۳/۹۴۰	۱۳/۸۷۸	۱۳/۹۶۲	۹/۹۸۳	۹/۸۸۸	۹/۸۷۴	۹/۹۸۳	۰/۳	C-S
۱۲/۸۵۰	۱۲/۸۲۵	۱۲/۷۵۰	۱۲/۸۵۰	۵/۰۴۸	۵/۰۵۸	۵/۰۷۸	۵/۰۴۸	۰/۵	
۳/۶۷۴	۳/۶۷۰	۳/۶۶۰	۳/۶۷۴	۲/۱۷۵	۲/۱۷۴	۲/۱۷۰	۲/۱۷۵	۰/۱	
۴/۰۶۷	۴/۰۵۶	۴/۰۲۲	۴/۰۶۷	۱/۵۹۵	۱/۵۹۴	۱/۵۹۲	۱/۵۹۵	۰/۳	C-F
۴/۶۲۵	۴/۶۰۲	۴/۵۳۶	۴/۶۲۵	۱/۰۲۹	۱/۰۳۱	۱/۰۳۶	۱/۰۲۹	۰/۵	
۰	۰/۲۷	۱/۱	-	۰	۰/۹۵	۱/۰۹	-	-	Δ_{max}

جدول (۲): مقادیر بار کماتشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تیری با مقطع متغیر (تغییرات خطی ممان اینرسی) بر بستر وینکلر- پاسترناک با شرایط مرزی مختلف.

FEM (روش اجزای محدود)			روش ریتز			FEM (روش اجزای محدود)			روش ریتز			\bar{k}_w or \bar{k}_p	β	شرایط مرزی
$\bar{\omega}$			$\bar{\omega}$			\bar{P}_{cr}			\bar{P}_{cr}					
N			N			N			N					
۲۰	۵	۱	۱۰	۵	۱	۲۰	۵	۱	۱۰	۵	۱			
۱۰/۳۸۸	۱۰/۳۸۹	۱۱/۴۲۵	۱۰/۳۸۸	۱۰/۳۸۸	۱۱/۴۲۵	۱۰/۳۸۵	۱۰/۳۸۶	۱۲/۴۰۰	۱۰/۳۸۵	۱۰/۳۸۵	۱۲/۴۰۰	$\bar{k}_w = 10$	۰/۱	
۱۰/۴۳۸	۱۰/۴۳۷	۱۱/۴۷۹	۱۰/۴۳۸	۱۰/۴۳۸	۱۱/۴۷۹	۹/۳۵۵	۹/۳۵۳	۱۱/۲۰۰	۹/۳۵۵	۹/۳۵۵	۱۱/۲۰۰	$\bar{k}_p = 0$	۰/۳	S-S
۱۰/۴۸۵	۱۰/۴۷۹	۱۱/۵۴۷	۱۰/۴۸۵	۱۰/۴۸۵	۱۱/۵۴۷	۸/۲۶۴	۸/۲۵۲	۱۰/۰۰۰	۸/۲۶۴	۸/۲۶۴	۱۰/۰۰۰		۰/۵	
۱۰/۳۸۲	۱۰/۳۸۳	۱۱/۴۲۵	۱۰/۳۸۲	۱۰/۳۸۲	۱۱/۴۲۵	۱۰/۳۷۲	۱۰/۳۷۳	۱۲/۴۰۰	۱۰/۳۷۲	۱۰/۳۷۲	۱۲/۴۰۰	$\bar{k}_w = 0$	۰/۱	
۱۰/۴۳۱	۱۰/۴۳۰	۱۱/۴۷۹	۱۰/۴۳۱	۱۰/۴۳۱	۱۱/۴۷۹	۹/۳۴۳	۹/۳۴۱	۱۱/۲۰۰	۹/۳۴۳	۹/۳۴۴	۱۱/۲۰۰	$\bar{k}_p = 1$	۰/۳	S-S
۱۰/۴۷۸	۱۰/۴۷۲	۱۱/۵۴۷	۱۰/۴۷۸	۱۰/۴۷۸	۱۱/۵۴۷	۸/۲۵۶	۸/۲۴۴	۱۰/۰۰۰	۸/۲۵۶	۸/۲۵۶	۱۰/۰۰۰		۰/۵	

ادامه جدول (۲).

FEM (روش اجزای محدود)			روش ریتز			FEM (روش اجزای محدود)			روش ریتز			\bar{k}_w or \bar{k}_p	β	شرایط مرزی
$\bar{\omega}$			$\bar{\omega}$			\bar{P}_{cr}			\bar{P}_{cr}					
N			N			N			N					
۲۰	۵	۱	۱۰	۵	۱	۲۰	۵	۱	۱۰	۵	۱	$\bar{k}_w = 1.0$ $\bar{k}_p = 0$	۰/۱ ۰/۳ ۰/۵	C-S
۱۵/۸۶۵	۱۵/۸۵۹	۲۰/۷۴۹	۱۵/۸۶۵	۱۵/۸۶۵	۲۰/۶۱۷	۱۹/۹۸۵	۱۹/۹۸۹	۲۹/۲۱۴	۱۹/۹۸۵	۱۹/۹۸۵	۲۸/۴۶۴			
۱۶/۱۴۷	۱۶/۱۱۸	۲۰/۷۷۹	۱۶/۱۴۷	۱۶/۱۴۷	۲۰/۳۲۱	۱۷/۸۳۴	۱۷/۸۰۹	۲۶/۲۱۴	۱۷/۸۳۴	۱۷/۸۳۴	۲۳/۹۶۴			
۱۶/۴۷۷	۱۶/۴۱۹	۲۰/۸۱۷	۱۶/۴۷۷	۱۶/۴۷۷	۱۹/۹۰۹	۱۵/۵۱۲	۱۵/۴۵۶	۲۳/۲۱۴	۱۵/۵۱۲	۱۵/۵۱۳	۱۹/۴۶۴	$\bar{k}_w = 0$ $\bar{k}_p = 1$	۰/۱ ۰/۳ ۰/۵	C-S
۱۵/۹۱۷	۱۵/۹۱۱	۲۰/۸۵۰	۱۵/۹۱۷	۱۵/۹۱۷	۲۰/۷۲۰	۲۰/۱۶۹	۲۰/۱۷۱	۲۹/۵۰۰	۲۰/۱۶۹	۲۰/۱۶۹	۲۸/۴۶۴			
۱۶/۲۱۰	۱۶/۱۸۰	۲۰/۸۹۲	۱۶/۲۱۰	۱۶/۲۱۰	۲۰/۴۴۱	۱۸/۰۳۵	۱۸/۰۰۹	۲۶/۵۰۰	۱۸/۰۳۵	۱۸/۰۳۵	۲۳/۹۶۴			
۱۶/۵۵۵	۱۶/۴۹۶	۲۰/۹۴۴	۱۶/۵۵۵	۱۶/۵۵۵	۲۰/۰۵۵	۱۵/۷۳۹	۱۵/۶۸۰	۲۳/۵۰۰	۱۵/۷۳۹	۱۵/۷۴۰	۱۹/۴۶۴	$\bar{k}_w = 1.0$ $\bar{k}_p = 0$	۰/۱ ۰/۳ ۰/۵	C-C
۲۲/۶۰۳	۲۲/۶۱۶	-	۲۲/۶۰۳	۲۲/۶۰۳	۲۲/۶۸۳	۳۸/۲۳۶	۳۸/۳۶۳	-	۳۸/۲۳۶	۳۸/۲۳۶	۴۰/۷۳۳			
۲۲/۵۸۴	۲۲/۶۰۹	-	۲۲/۵۸۴	۲۲/۵۸۴	۲۲/۷۱۱	۳۴/۰۳۲	۳۴/۱۷۷	-	۳۴/۰۳۲	۳۴/۰۳۲	۳۶/۵۳۳			
۲۲/۴۸۳	۲۲/۵۴۳	-	۲۲/۴۸۳	۲۲/۴۸۳	۲۲/۷۴۵	۲۹/۴۵۳	۲۹/۶۷۱	-	۲۹/۴۵۳	۲۹/۴۵۴	۳۲/۳۳۳	$\bar{k}_w = 0$ $\bar{k}_p = 1$	۰/۱ ۰/۳ ۰/۵	C-C
۲۲/۶۵۶	۲۲/۶۷۰	-	۲۲/۶۵۶	۲۲/۶۵۶	۲۲/۷۳۰	۳۸/۴۷۷	۳۸/۶۰۰	-	۳۸/۴۷۷	۳۸/۴۷۷	۴۰/۹۰۰			
۲۲/۶۴۴	۲۲/۶۶۸	-	۲۲/۶۴۴	۲۲/۶۴۴	۲۲/۷۶۲	۳۴/۲۷۳	۳۴/۴۱۶	-	۳۴/۲۷۳	۳۴/۳۷۴	۳۶/۷۰۰			
۲۲/۵۵۲	۲۲/۶۱۱	-	۲۲/۵۵۲	۲۲/۵۵۲	۲۲/۸۰۴	۲۹/۶۹۷	۲۹/۹۱۳	-	۲۹/۶۹۷	۲۹/۶۹۸	۳۲/۵۰۰	-	-	$\Delta_{max} \%$
-	۰/۳۵	۳۰/۹۹	-	۰	۳۰/۱۷	-	۰/۱۴	۴۹/۶۵	-	۰/۰۱	۴۲/۵۴			

جدول (۳): مقادیر بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تیری با مقطع متغیر (تغییرات مکعبی ممان اینرسی) بر بستر وینکلر-پاسترناک با شرایط مرزی مختلف.

FEM (روش اجزای محدود)			روش ریتز			FEM (روش اجزای محدود)			روش ریتز			\bar{k}_w or \bar{k}_p	β	شرایط مرزی
$\bar{\omega}$			$\bar{\omega}$			\bar{P}_{cr}			\bar{P}_{cr}					
N			N			N			N					
۲۰	۵	۱	۱۰	۵	۱	۲۰	۵	۱	۱۰	۵	۱	$\bar{k}_w = 1.0$ $\bar{k}_p = 0$	۰/۱ ۰/۳ ۰/۵	S-S
۹/۹۱۴	۹/۹۱۵	۱۰/۹۴۲	۹/۹۱۴	۹/۹۱۴	۱۰/۹۱۵	۹/۴۴۷	۹/۴۵۰	۱۱/۳۷۴	۹/۴۴۷	۹/۴۴۷	۱۱/۳۱۷			
۸/۹۸۷	۸/۹۹۲	۱۰/۳۲۳	۸/۹۸۷	۸/۹۸۷	۱۰/۰۵۸	۶/۸۴۱	۶/۸۴۸	۹/۰۵۸	۶/۸۴۱	۶/۸۴۱	۸/۵۹۹			
۸/۰۲۲	۸/۰۳۷	۱۰/۱۶۵	۸/۰۲۲	۸/۰۲۲	۹/۳۹۹	۴/۵۹۲	۴/۶۰۸	۷/۷۵۰	۴/۵۹۲	۴/۵۹۳	۶/۶۲۵	$\bar{k}_w = 0$ $\bar{k}_p = 1$	۰/۱ ۰/۳ ۰/۵	S-S
۹/۹۰۷	۹/۹۰۸	۱۰/۹۴۲	۹/۹۰۷	۹/۹۰۷	۱۰/۹۱۵	۹/۴۳۴	۹/۴۳۷	۱۱/۳۷۴	۹/۴۳۴	۹/۴۳۵	۱۱/۳۱۷			
۸/۹۸۲	۸/۹۸۷	۱۰/۳۲۳	۸/۹۸۲	۸/۹۸۲	۱۰/۰۵۸	۶/۸۴۰	۶/۸۴۸	۹/۰۵۸	۶/۸۴۰	۶/۸۴۱	۸/۵۹۹			
۸/۰۳۰	۸/۰۴۵۲	۱۰/۱۶۵	۸/۰۳۰	۸/۰۳۰	۹/۳۹۹	۴/۶۲۸	۴/۶۴۵	۷/۷۵۰	۴/۶۲۸	۴/۶۲۹	۶/۶۲۵	$\bar{k}_w = 1.0$ $\bar{k}_p = 0$	۰/۱ ۰/۳ ۰/۵	C-S
۱۵/۲۰۲	۱۵/۱۷۹	۱۹/۸۱۸	۱۵/۲۰۲	۱۵/۲۰۲	۱۹/۱۳۵	۱۸/۰۵۳	۱۸/۰۳۷	۲۶/۶۵۰	۱۸/۰۵۳	۱۸/۰۵۳	۲۴/۵۱۸			
۱۴/۰۷۹	۱۴/۰۱۹	۱۸/۵۳۵	۱۴/۰۷۹	۱۴/۰۷۹	۱۶/۱۵۶	۱۲/۶۶۲	۱۲/۶۳۱	۲۰/۸۵۹	۱۲/۶۶۲	۱۲/۶۶۳	۱۵/۱۴۹			
۱۲/۸۷۳	۱۲/۸۰۵	۱۸/۱۲۰	۱۲/۸۷۳	۱۲/۸۷۳	۱۳/۶۵۲	۸/۰۰۷	۸/۰۰۱	۱۷/۵۸۹	۸/۰۰۷	۸/۰۰۸	۹/۱۵۲	$\bar{k}_w = 0$ $\bar{k}_p = 1$	۰/۱ ۰/۳ ۰/۵	C-S
۱۵/۲۶۱	۱۵/۲۳۷	۱۹/۹۲۳	۱۵/۲۶۱	۱۵/۲۶۱	۱۹/۲۴۶	۱۸/۲۵۲	۱۸/۲۳۵	۲۶/۹۳۵	۱۸/۲۵۲	۱۸/۲۵۲	۲۴/۸۰۴			
۱۴/۱۷۵	۱۴/۱۱۳	۱۸/۶۶۲	۱۴/۱۷۵	۱۴/۱۷۵	۱۶/۳۰۸	۱۲/۹۲۳	۱۲/۸۸۸	۲۱/۱۴۵	۱۲/۹۲۳	۱۲/۹۲۴	۱۵/۴۳۵			
۱۳/۰۴۵	۱۲/۹۷۲	۱۸/۲۶۶	۱۳/۰۴۵	۱۳/۰۴۵	۱۳/۸۶۳	۸/۳۶۲	۸/۳۵۰	۱۷/۸۷۵	۸/۳۶۲	۸/۳۶۲	۹/۴۳۸	$\bar{k}_w = 1.0$ $\bar{k}_p = 0$	۰/۱ ۰/۳ ۰/۵	C-C
۲۱/۴۸۸	۲۱/۵۰۷	-	۲۱/۴۸۸	۲۱/۴۸۸	۲۱/۶۱۹	۳۴/۴۸۷	۳۴/۶۲۵	-	۱۴/۴۸۷	۱۴/۴۸۷	۳۷/۰۰۰			
۱۹/۱۹۱	۱۹/۲۷۸	-	۱۹/۱۹۱	۱۹/۱۹۱	۱۹/۸۴۳	۲۴/۰۳۵	۲۴/۳۳۹	-	۲۴/۰۳۵	۲۴/۰۳۶	۲۷/۸۸۹			
۱۶/۷۵۴	۱۷/۰۱۱	-	۱۶/۷۵۴	۱۶/۷۵۴	۱۸/۶۱۰	۱۵/۰۵۱	۱۵/۷۰۴	-	۱۵/۰۵۱	۱۵/۰۵۷	۲۱/۶۴۶			

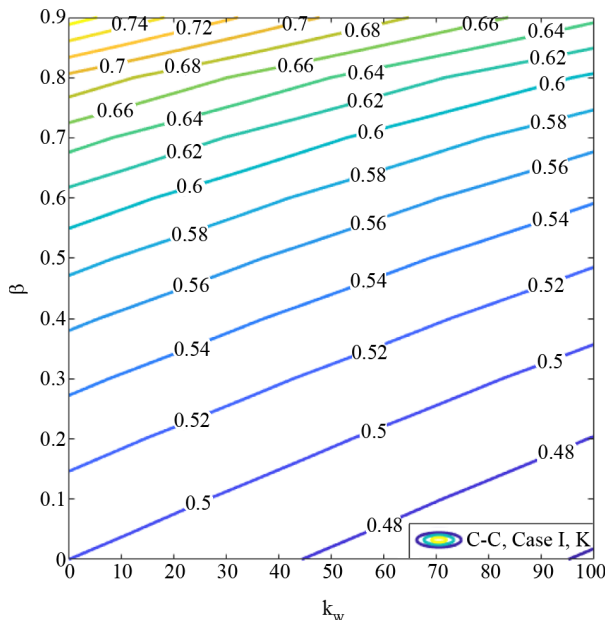
ادامه جدول (۳).

FEM (روش اجزای محدود)			روش ریتز			FEM (روش اجزای محدود)			روش ریتز			\bar{k}_w or \bar{k}_p	β	شرایط مرزی
$\bar{\omega}$			$\bar{\omega}$			\bar{P}_{cr}			\bar{P}_{cr}					
N			N			N			N					
۲۰	۵	۱	۱۰	۵	۱	۲۰	۵	۱	۱۰	۵	۱			
۲۱/۵۴۴	۲۱/۵۶۳	-	۲۱/۵۴۴	۲۱/۵۴۴	۲۱/۶۶۷	۳۴/۷۲۹	۳۴/۸۶۴	-	۳۴/۷۲۹	۳۴/۷۳۰	۳۷/۱۶۷	$\bar{k}_w = 0$	۰/۱	
۱۹/۲۶۶	۱۹/۳۵۲	-	۱۹/۲۶۶	۱۹/۲۶۶	۱۹/۹۰۲	۲۴/۲۹۱	۲۴/۵۹۲	-	۲۴/۲۹۱	۲۴/۲۹۲	۲۸/۰۵۶	$\bar{k}_p = 1$	۰/۳	C-C
۱۶/۸۶۵	۱۷/۱۲۰	-	۱۶/۸۶۵	۱۶/۸۶۵	۱۸/۶۸۲	۱۵/۳۴۹	۱۵/۹۹۳	-	۱۵/۳۴۹	۱۵/۳۵۴	۲۱/۸۱۳		۰/۵	
-	۰/۵۶	۴۰/۷۵	-	۰	۶/۲۷	-	۰/۳۷	۱۱۹/۶۷	-	۰/۰۴	۴۴/۲۷	-	-	$\Delta_{max} \%$

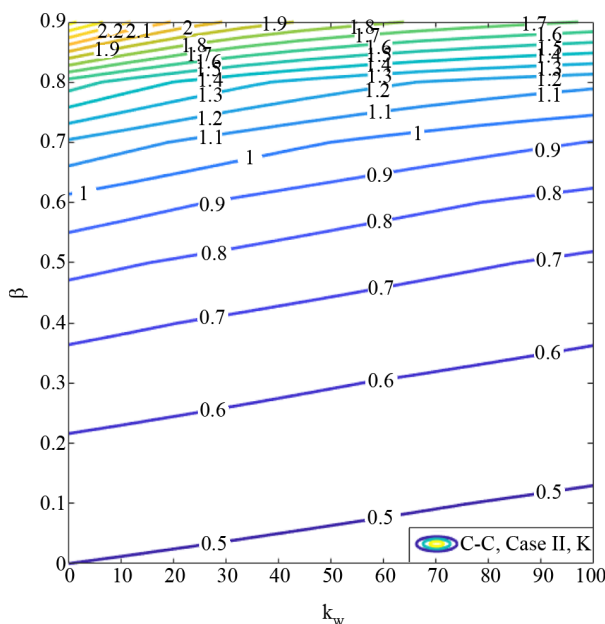
جدول (۴): مقادیر بار کمانشی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تیری با مقطع متغیر (تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی) بر بستر وینکلر- پاسترناک با شرایط مرزی مختلف.

FEM (روش اجزای محدود)			روش ریتز			FEM (روش اجزای محدود)			روش ریتز			\bar{k}_w or \bar{k}_p	β	شرایط مرزی
$\bar{\omega}$			$\bar{\omega}$			\bar{P}_{cr}			\bar{P}_{cr}					
N			N			N			N					
۲۰	۵	۱	۱۰	۵	۱	۲۰	۵	۱	۱۰	۵	۱			
۹/۹۳۷	۹/۹۳۹	۱۰/۹۹۳	۹/۹۳۷	۹/۹۳۷	۱۰/۹۵۱	۹/۰۰۶	۹/۰۰۹	۱۰/۹۳۷	۹/۰۰۶	۹/۰۰۶	۱۰/۸۲۸	$\bar{k}_w = 10$	۰/۱	
۹/۰۵۹	۹/۰۶۴	۱۰/۶۴۴	۹/۰۵۹	۹/۰۵۹	۱۰/۲۷۱	۵/۸۲۶	۵/۸۴۲	۸/۴۴۱	۵/۸۲۶	۵/۸۲۶	۷/۶۵۵	$\bar{k}_p = 0$	۰/۳	S-S
۸/۱۷۹	۸/۱۹۳	۱۰/۸۶۳	۸/۱۷۹	۸/۱۸۰	۹/۹۴۴	۳/۳۹۲	۳/۴۲۶	۷/۳۷۵	۳/۳۹۲	۳/۴۰۰	۵/۶۵۰		۰/۵	
۹/۹۳۰	۹/۹۳۲	۱۰/۹۹۳	۹/۹۳۰	۹/۹۳۰	۱۰/۹۵۱	۸/۹۹۴	۸/۹۹۸	۱۰/۹۳۷	۸/۹۹۴	۸/۹۹۵	۱۰/۸۲۸	$\bar{k}_w = 0$	۰/۱	
۹/۰۵۶	۹/۰۶۲	۱۰/۶۴۴	۹/۰۵۶	۹/۰۵۶	۱۰/۲۷۱	۵/۸۳۶	۸/۸۵۲	۸/۴۴۱	۵/۸۳۶	۵/۸۳۶	۷/۶۵۵	$\bar{k}_p = 1$	۰/۳	S-S
۸/۲۰۳	۸/۲۱۸	۱۰/۸۶۳	۸/۲۰۳	۸/۲۰۴	۹/۹۴۴	۳/۴۶۷	۳/۵۰۱	۷/۳۷۵	۳/۴۶۷	۳/۴۷۲	۵/۶۵۰		۰/۵	
۱۵/۳۲۷	۱۵/۲۹۵	۱۹/۸۸۳	۱۵/۳۲۷	۱۵/۳۲۷	۱۹/۰۵۰	۱۷/۱۴۷	۱۷/۱۲۷	۲۵/۵۵۶	۱۷/۱۴۷	۱۷/۱۴۷	۲۲/۷۹۰	$\bar{k}_w = 10$	۰/۱	
۱۴/۴۸۲	۱۴/۳۹۹	۱۹/۰۵۲	۱۴/۴۸۲	۱۴/۴۸۲	۱۶/۱۲۹	۱۰/۵۹۹	۱۰/۵۸۵	۱۹/۳۱۶	۱۰/۵۹۹	۱۰/۶۰۱	۱۲/۳۱۰	$\bar{k}_p = 0$	۰/۳	C-S
۱۳/۶۳۸	۱۳/۵۳۶	۱۹/۳۱۳	۱۳/۶۳۸	۱۳/۶۳۸	۱۴/۱۷۳	۵/۶۲۱	۵/۶۵۹	۱۶/۶۵۲	۵/۶۲۱	۵/۶۲۵	۶/۸۷۵		۰/۵	
۱۵/۳۹۱	۱۵/۳۵۸	۱۹/۹۹۴	۱۵/۳۹۱	۱۵/۳۹۱	۱۹/۱۶۹	۱۷/۳۵۵	۱۷/۳۳۲	۲۵/۸۴۲	۱۷/۳۵۵	۱۷/۳۵۵	۲۳/۰۷۶	$\bar{k}_w = 0$	۰/۱	
۱۴/۶۰۸	۱۴/۵۲۱	۱۹/۱۹۳	۱۴/۶۰۸	۱۴/۶۰۸	۱۶/۳۱۵	۱۰/۸۹۴	۱۰/۸۷۴	۱۹/۶۰۲	۱۰/۸۹۴	۱۰/۸۹۵	۱۲/۵۹۶	$\bar{k}_p = 1$	۰/۳	C-S
۱۳/۹۱۷	۱۳/۸۰۲	۱۹/۴۷۸	۱۳/۹۱۷	۱۳/۹۱۷	۱۴/۴۶۴	۶/۰۴۸	۶/۰۷۸	۱۶/۹۳۸	۶/۰۴۸	۶/۰۵۰	۷/۱۶۱		۰/۵	
۲۱/۵۰۵	۲۱/۵۲۶	-	۲۱/۵۰۵	۲۱/۵۰۵	۲۱/۶۷۴	۳۲/۷۳۴	۳۲/۸۸۶	-	۳۲/۷۳۴	۳۲/۷۳۵	۳۵/۳۴۰	$\bar{k}_w = 10$	۰/۱	
۱۹/۲۹۴	۱۹/۴۰۲	-	۱۹/۲۹۴	۱۹/۲۹۴	۲۰/۳۱۳	۲۰/۰۷۴	۲۰/۴۸۰	-	۲۰/۰۷۴	۲۰/۰۷۵	۲۴/۹۱۲	$\bar{k}_p = 0$	۰/۳	C-C
۱۷/۰۵۵	۱۷/۳۷۳	-	۱۷/۰۵۵	۱۷/۰۵۵	۱۹/۹۴۴	۱۰/۵۵۱	۱۱/۳۳۹	-	۱۰/۵۵۱	۱۰/۵۵۱	۱۸/۸۳۳		۰/۵	
۲۱/۵۶۵	۲۱/۵۸۶	-	۲۱/۵۶۵	۲۱/۵۶۵	۲۱/۷۲۶	۳۲/۹۷۷	۳۳/۱۲۶	-	۳۲/۹۷۷	۳۲/۹۷۹	۳۵/۵۰۷	$\bar{k}_w = 0$	۰/۱	
۱۹/۳۸۵	۱۹/۴۹۲	-	۱۹/۳۸۵	۱۹/۳۸۵	۲۰/۳۸۱	۲۰/۳۴۴	۲۰/۷۴۵	-	۲۰/۳۴۴	۲۰/۳۴۵	۲۵/۰۷۹	$\bar{k}_p = 1$	۰/۳	C-C
۱۷/۲۲۶	۱۷/۵۳۳	-	۱۷/۲۲۶	۱۷/۲۲۶	۲۰/۰۳۲	۱۰/۸۷۰	۱۱/۶۶۶	-	۱۰/۸۷۰	۱۰/۸۷۰	۱۹/۰۰۰		۰/۵	
-	۰/۱۸	۴۱/۶۱	-	۰/۰۱	۲۴/۵۵	-	۱/۰۰۱	۱۹۶/۲۵	-	۰/۲۳	۷۸/۴۹	-	-	$\Delta_{max} \%$

یکسان و به طور هم‌زمان در امتداد طول مقطع تغییر می‌یابد. به این ترتیب، صلیبیت خمشی تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی در مقایسه با تغییرات مکعبی و خطی ممان اینرسی کوچک‌تر می‌شود.



شکل (۲): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد برای شرایط مرزی دوسرگیردار.



شکل (۳): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد برای شرایط مرزی دوسرگیردار.

۳-۲- تأثیر هم‌زمان ضریب شیب مقطع β و ثابت فنری وینکلر \bar{k}_w بر ضریب طول مؤثر

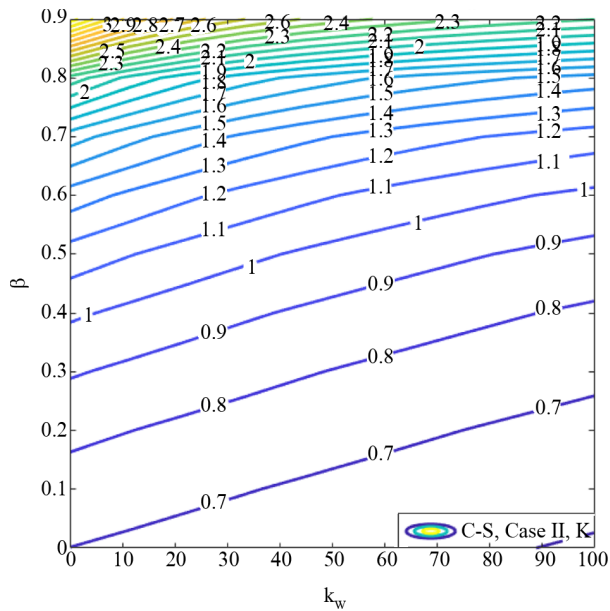
در این بخش به بررسی اثر هم‌زمان ضریب شیب مقطع غیرمنشوری و ثابت فنری وینکلر بر ضریب طول مؤثر می‌پردازیم. بدین منظور، ضریب طول مؤثر تیر غیرمنشوری به‌ازای مقادیری از ضریب شیب مقطع $0 < \beta < 0.9$ و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد $100 < \bar{k}_w < 10$ ، در شرایط مرزی مختلف) محاسبه می‌شود. برای کاربردی بودن نتایج، تغییرات طول مؤثر بر حسب ثابت فنری وینکلر بی‌بعد و ضریب شیب مقطع به صورت منحنی هم‌تراز نمایش داده می‌شود. تمامی پارامترهای معادله از جمله ثابت فنری وینکلر بی‌بعد \bar{k}_w و ضریب شیب مقطع β و ضریب طول مؤثر K پارامترهای بی‌بعد هستند. نتایج این تحقیق قابلیت تعمیم دارد و مهندسان می‌توانند از نمودارهای هم‌تراز برای طراحی تیرهای غیرمنشوری بر ثابت فنری وینکلر استفاده کنند.

در شکل (۲) تغییرات طول مؤثر بر حسب ضریب شیب و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد نشان داده می‌شود. مطابق شکل‌های (۲) تا (۴) مشخص است اگر شرایط مرزی دوسرگیردار و تغییرات ممان اینرسی در طول تیر به صورت (خطی، مکعبی و مرتبه چهارم) فرض شود، افزایش ضریب شیب مقطع و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد به ترتیب سبب افزایش و کاهش ضریب طول مؤثر می‌گردد.

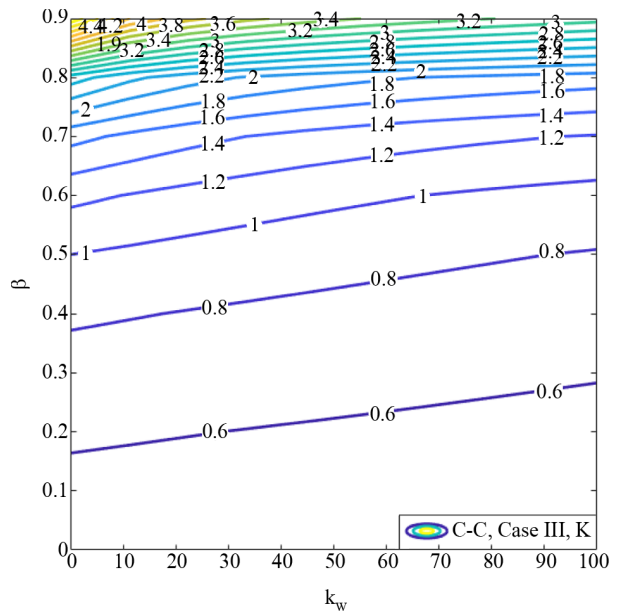
با توجه به رابطه (۲۳) مقدار ضریب طول مؤثر به طور مستقیم بر ظرفیت بار کمانشی اثرگذار است. به این ترتیب، افزایش ضریب ثابت فنری وینکلر بی‌بعد منجر به افزایش ظرفیت بار کمانشی و افزایش ضریب شیب منجر به کاهش مقدار ظرفیت بار کمانشی می‌شود. مشخص است که با افزایش ثابت فنری وینکلر بی‌بعد سختی خمشی تیر الاستیک افزایش می‌یابد. همچنین افزایش ضریب شیب سبب کاهش سختی خمشی تیر الاستیک می‌شود. در مورد تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی نیز تغییرات طول مؤثر بحرانی‌تر است. زیرا برای تغییرات خطی ممان اینرسی مرتبه چهارم، پهنا و ضخامت به طور خطی با شیب

ضریب طول مؤثر بدون لحاظ بستر برای ضریب شیب $\beta = 0.9$ در تغییر خطی، مکعبی و مرتبه چهارم (۱/۴۵، ۴/۵۸، ۹/۸۹) است. درحالی که مقدار ضریب طول مؤثر با احتساب اثر ثابت فنری وینکلر به ترتیب برابر (۰/۸۴، ۲/۱۹، ۴/۰۶) می شود.

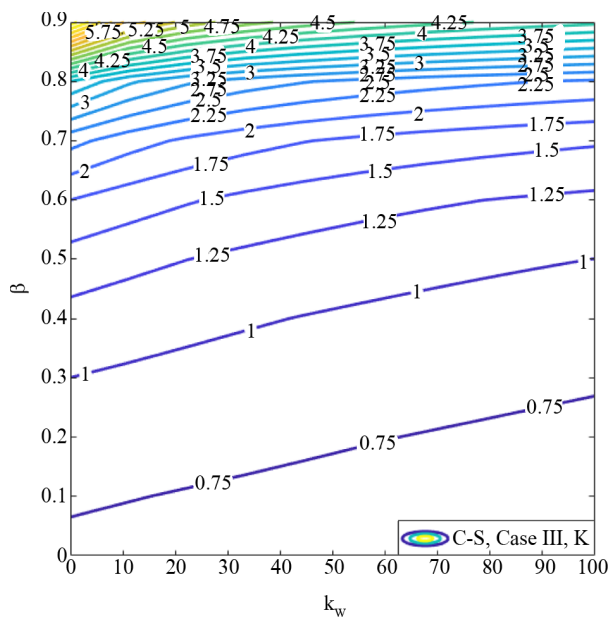
مطابق شکل های (۵) تا (۷) مبین است که برای شرایط مرزی گیردار- مفصلی همانند حالت دوسرگیردار، افزایش ضریب بستر وینکلر بی بعد باعث کاهش ضریب طول مؤثر و افزایش ضریب شیب منجر به افزایش آن می گردد. مشخص است که مقدار



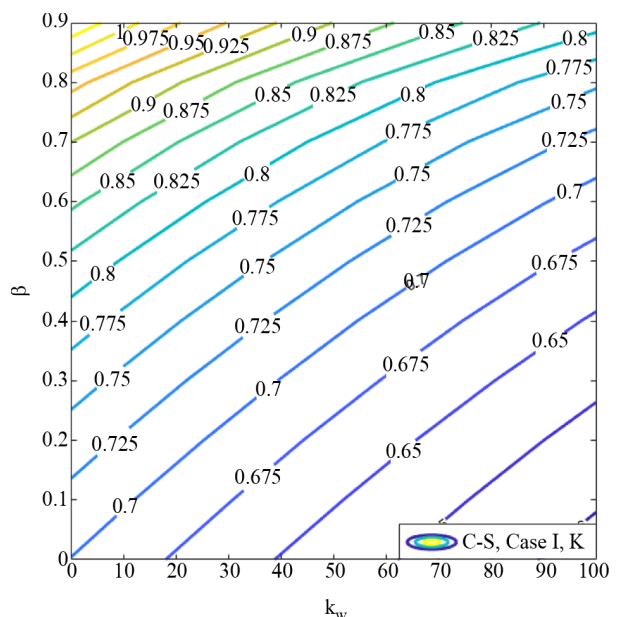
شکل (۶): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی بعد برای شرایط مرزی گیردار- مفصلی.



شکل (۴): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی بعد برای شرایط مرزی دوسرگیردار.

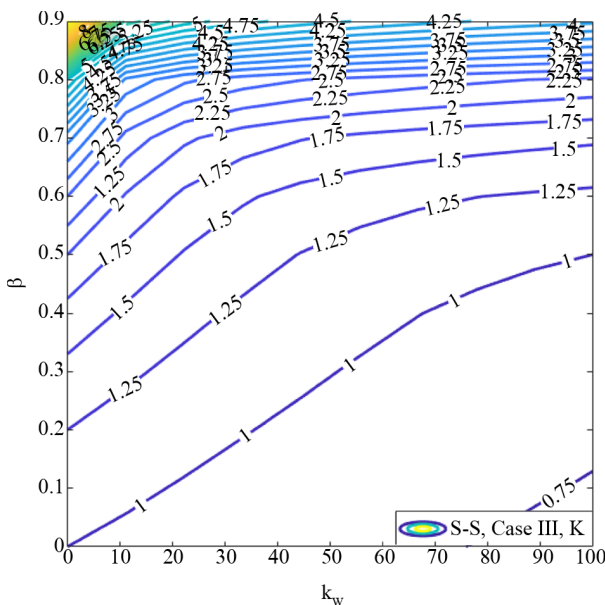


شکل (۷): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی بعد برای شرایط مرزی گیردار- مفصلی.



شکل (۵): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی بعد برای شرایط مرزی گیردار- مفصلی.

در تغییر خطی، مکعبی و مرتبه چهارم (۱/۰۴، ۳/۳۵، ۶/۸۷) است. درحالی‌که مقدار ضریب طول مؤثر با احتساب اثر ثابت فنری وینکلر به ترتیب برابر (۰/۸، ۲/۲، ۴/۰۶) می‌شود. بدیهی است که استفاده از تیری با مقطع متغیر بر بستر وینکلر حتی به ازای ضریب شیب $\beta = 0/9$ نیز امکان‌پذیر است.



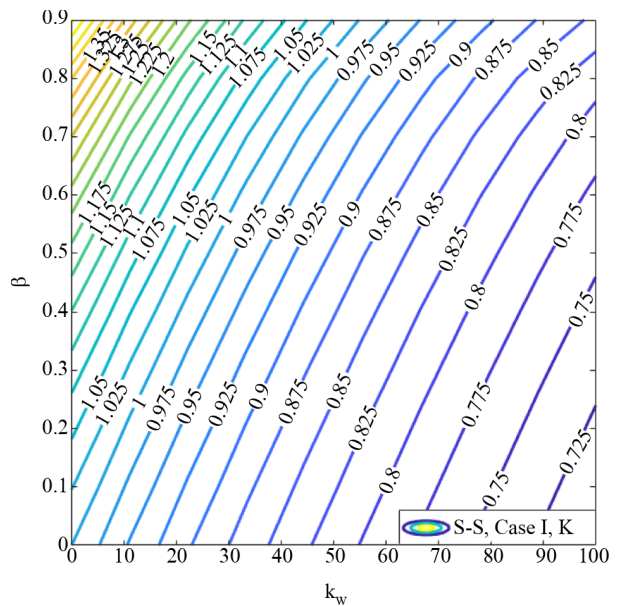
شکل (۱۰): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد برای شرایط مرزی دو سر مفصلی.

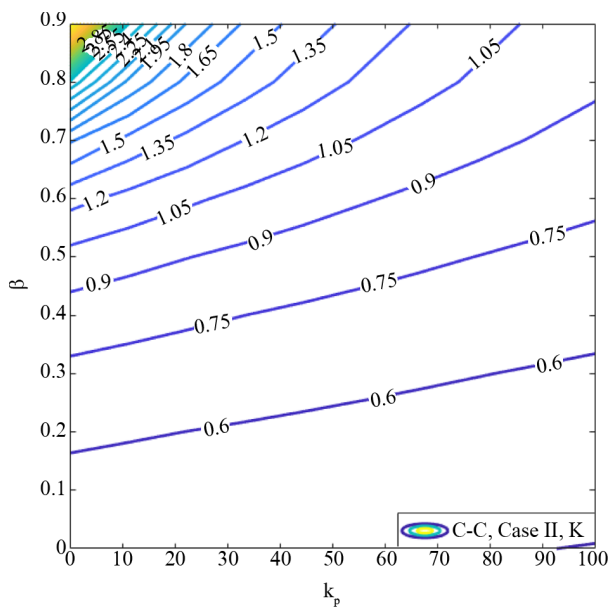
۳-۳- تأثیر هم‌زمان ضریب شیب مقطع β و ثابت برشی پاسترناک \bar{k}_p بر ضریب طول مؤثر

در این بخش به بررسی اثر هم‌زمان ضریب شیب مقطع غیرمنشوری و ثابت برشی پاسترناک بر ضریب طول مؤثر تیر پرداخته می‌شود. بدین منظور، ضریب طول مؤثر تیر غیرمنشوری به ازای مقادیری از ضریب شیب مقطع $0 < \beta < 0/9$ ، و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد $10 < \bar{k}_p < 30$ ، در شرایط مرزی مختلف محاسبه می‌شود. تمامی پارامترهای معادله از جمله ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد \bar{k}_p و ضریب شیب مقطع β و ضریب طول مؤثر K پارامترهای بی‌بعد هستند.

در شکل‌های (۱۱) تا (۱۳) تغییرات طول مؤثر برحسب ضریب شیب و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد نشان داده می‌شود.

همچنین مطابق شکل‌های (۸) الی (۱۰) مشخص است که برای شرایط مرزی دو سر مفصلی همانند حالت دوسرگیردار نیز افزایش ضریب بستر وینکلر بی‌بعد باعث کاهش ضریب طول مؤثر و افزایش ضریب شیب منجر به افزایش آن می‌گردد. ضریب طول مؤثر بدون لحاظ بستر برای ضریب شیب $\beta = 0/9$



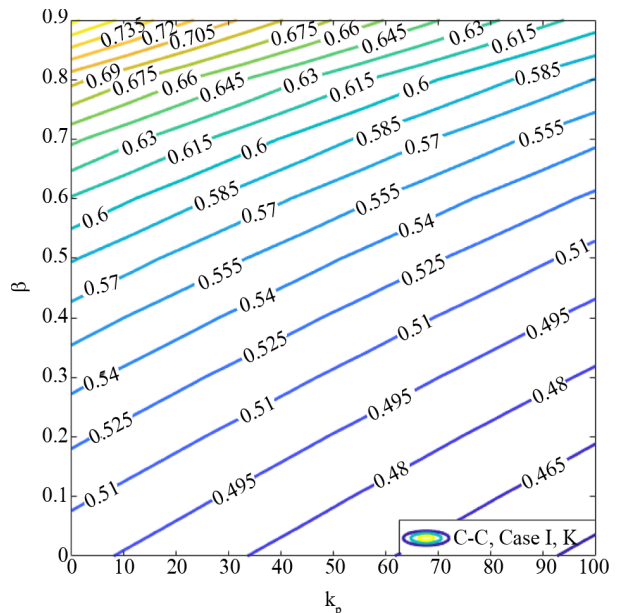


شکل (۱۳): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد برای شرایط مرزی دوسرگیردار.

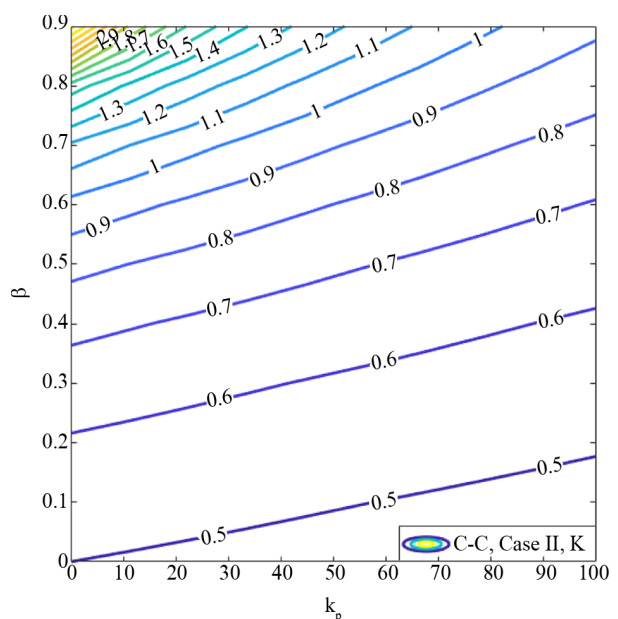
همانند شرایط ثابت فنری وینکلر، افزایش ضریب بستر پاسترناک بی‌بعد و افزایش ضریب شیب به ترتیب منجر به کاهش و افزایش ضریب طول مؤثر می‌گردد. مقدار ضریب طول مؤثر بدون لحاظ ثابت برشی پاسترناک برای ضریب شیب $\beta = 0.9$ در تغییر خطی، مکعبی و مرتبه چهارم به ترتیب برابر با $(0.77, 0.43, 0.95)$ است. در حالی که مقدار ضریب طول مؤثر با احتساب اثر ثابت برشی پاسترناک به ترتیب برابر با $(0.61, 0.92, 0.97)$ می‌شود و نشانگر این است که تأثیر ثابت برشی پاسترناک در افزایش سختی سازه در مقایسه با ثابت فنری وینکلر بیشتر است.

مطابق شکل‌های (۱۴) تا (۱۶) مشخص است که همانند شرایط مرزی دوسرگیردار، برای شرایط مرزی گیردار- مفصلی نیز افزایش ضریب بستر پاسترناک بی‌بعد و افزایش ضریب شیب به ترتیب منجر به کاهش و افزایش ضریب طول مؤثر می‌گردد. مقدار ضریب طول مؤثر بدون لحاظ ثابت برشی پاسترناک برای ضریب شیب $\beta = 0.9$ در تغییر خطی، مکعبی و مرتبه چهارم (شرایط مرزی گیردار- مفصلی) به ترتیب برابر با $(0.77, 0.43, 0.95)$ است.

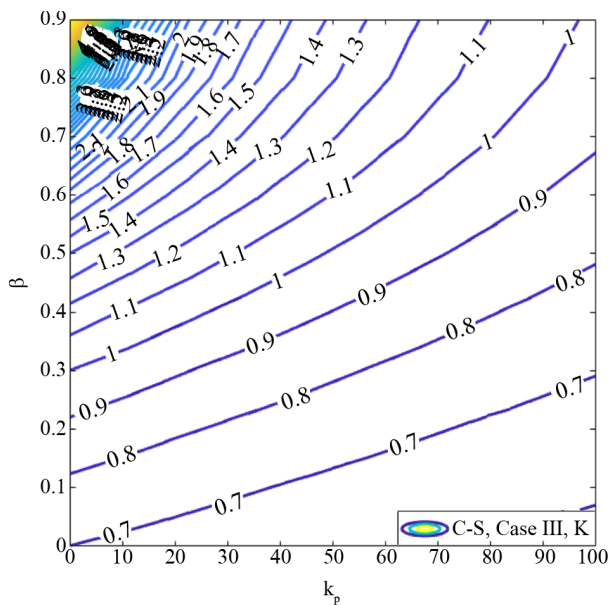
مشخص است اگر شرایط مرزی دوسرگیردار و تغییرات ممان اینرسی در طول تیر به صورت (خطی، مکعبی و مرتبه چهارم) فرض شود. همچنین تأثیر ثابت برشی پاسترناک در تغییر طول مؤثر، در مقایسه با ثابت فنری وینکلر چشمگیرتر است.



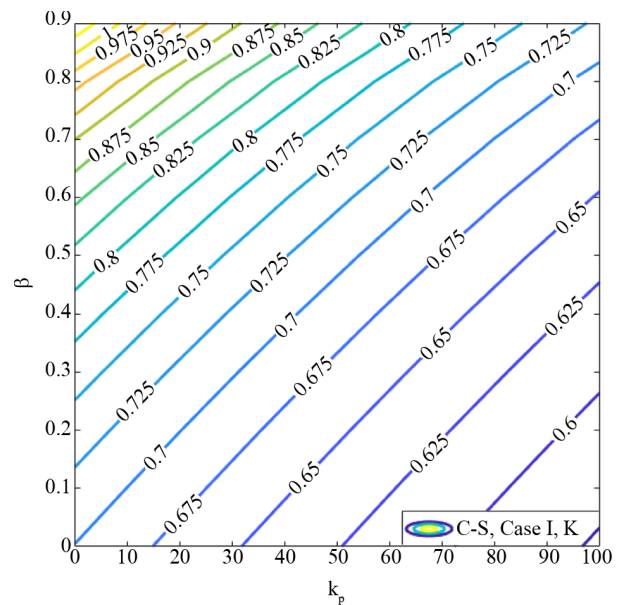
شکل (۱۱): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد برای شرایط مرزی دوسرگیردار.



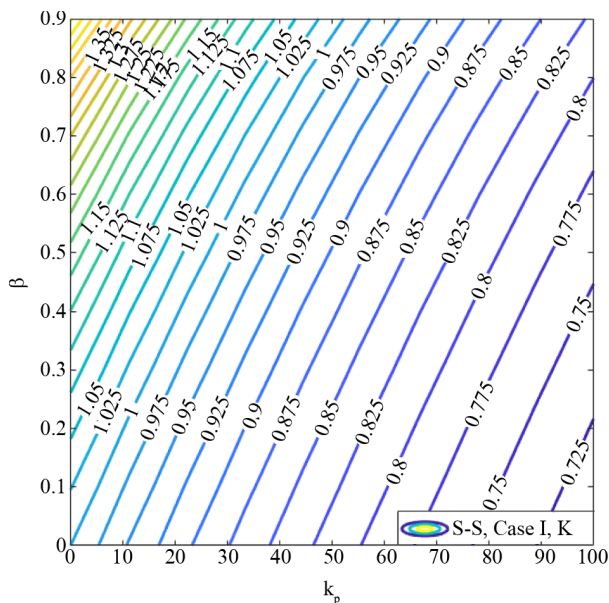
شکل (۱۲): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد برای شرایط مرزی دوسرگیردار.



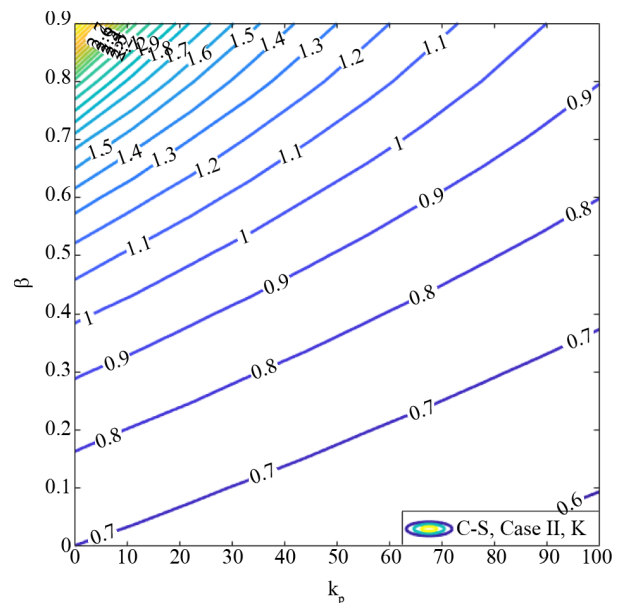
شکل (۱۶): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد برای شرایط مرزی گیردار-مفصلی.



شکل (۱۴): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد برای شرایط مرزی گیردار-مفصلی.



شکل (۱۷): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد برای شرایط مرزی دو سر مفصلی.



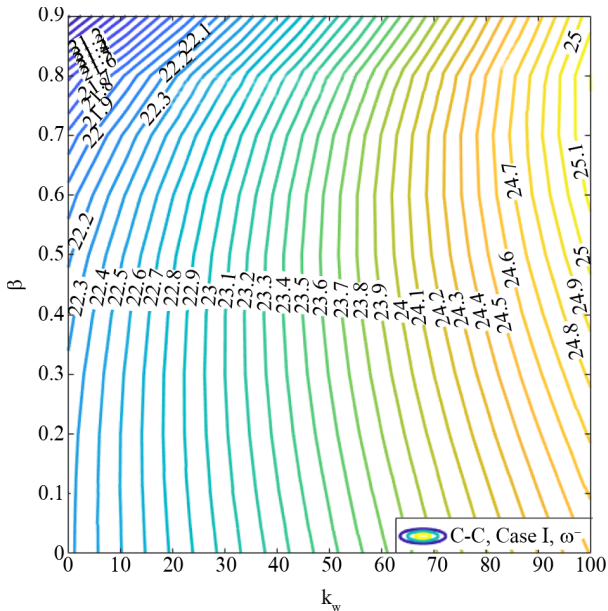
شکل (۱۵): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد برای شرایط مرزی گیردار-مفصلی.

۳-۴- تأثیر هم‌زمان ضریب شیب مقطع و ثابت فنری وینکلر بر فرکانس طبیعی بی‌بعد

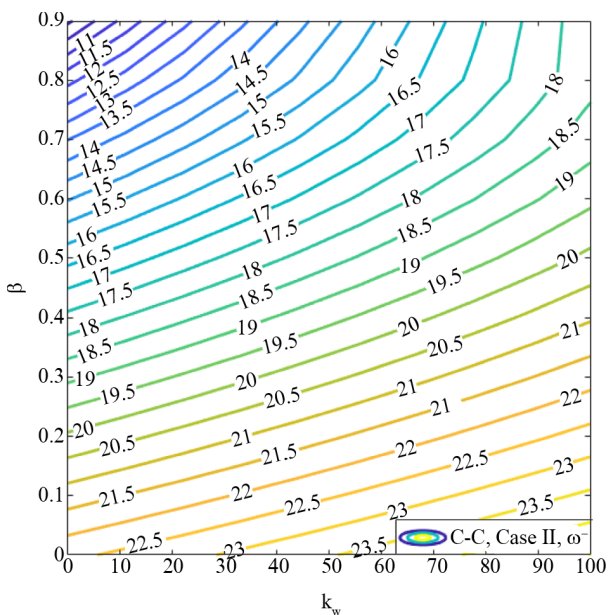
در این بخش اثر هم‌زمان ضریب شیب مقطع غیرمنشوری و ثابت فنری وینکلر بر فرکانس طبیعی بی‌بعد بررسی می‌شود.

مطابق شکل‌های (۱۷) تا (۱۹) مشخص است که برای شرایط دو سر مفصلی نیز افزایش ضریب بستر پاسترناک بی‌بعد و افزایش ضریب شیب به ترتیب منجر به کاهش و افزایش ضریب طول مؤثر می‌گردد.

ضریب شیب مقطع β و فرکانس طبیعی بی‌بعد $\bar{\omega}$ پارامترهای بی‌بعد هستند. در شکل‌های (۲۰) تا (۲۲)، تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب ضریب شیب و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد تیر دوسرگیردار نشان داده می‌شود.

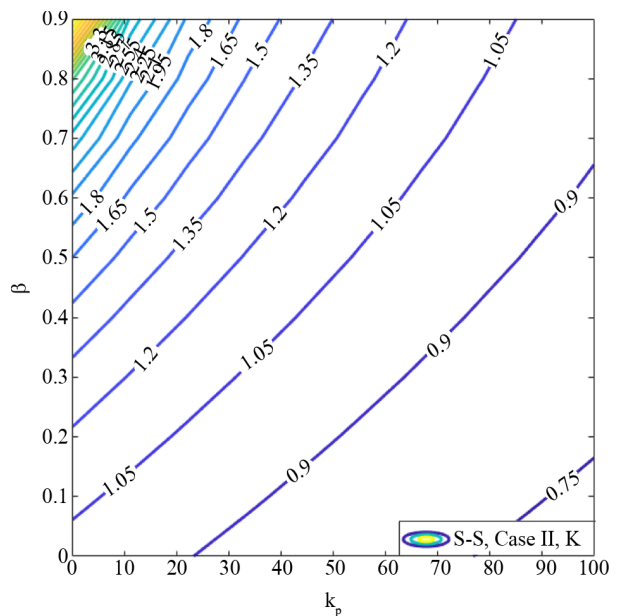


شکل (۲۰): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد برای شرایط مرزی دوسرگیردار.

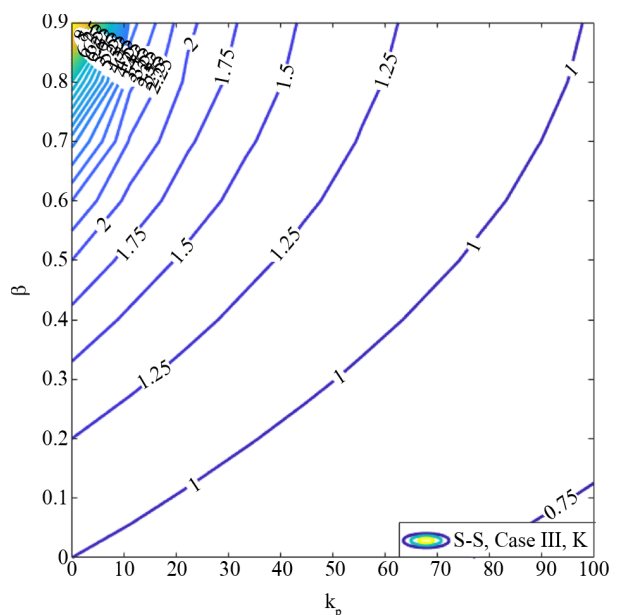


شکل (۲۱): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد برای شرایط مرزی دوسرگیردار.

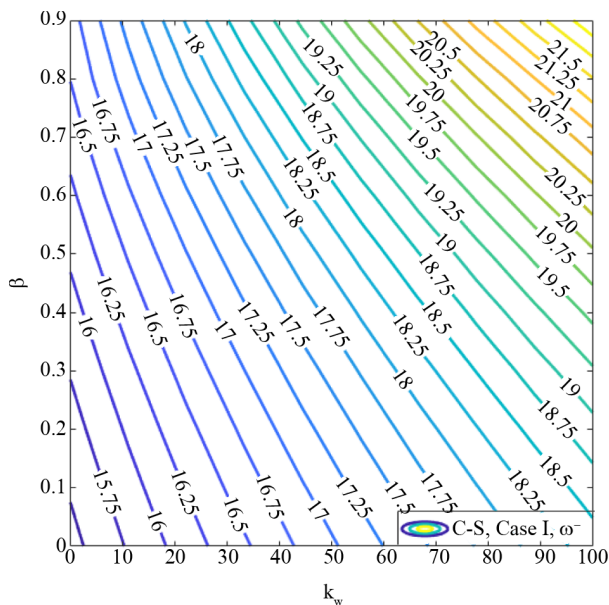
بدین منظور، فرکانس طبیعی بی‌بعد غیرمنشوری به‌ازای مقادیری از ضریب شیب مقطع $0 < \beta < 0.9$ و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد $0 < \bar{k}_w < 10$ ، در شرایط مرزی مختلف محاسبه می‌شود. تمامی پارامترهای معادله از جمله ثابت فنری وینکلر بی‌بعد \bar{k}_w و



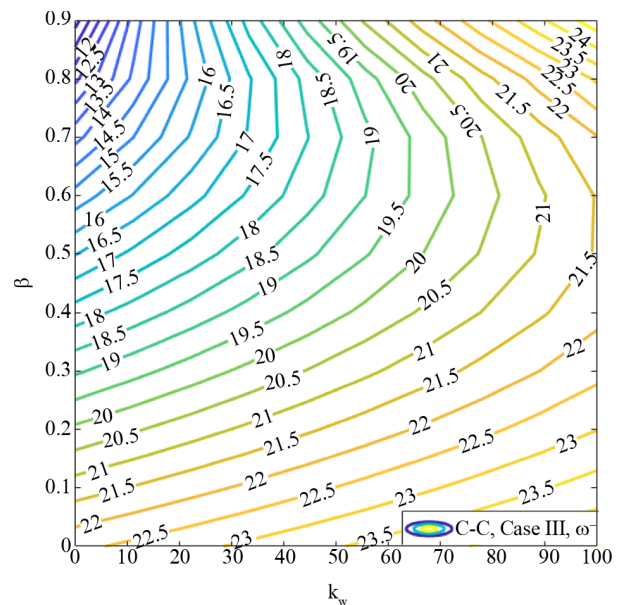
شکل (۱۸): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد برای شرایط مرزی دوسر مفصلی.



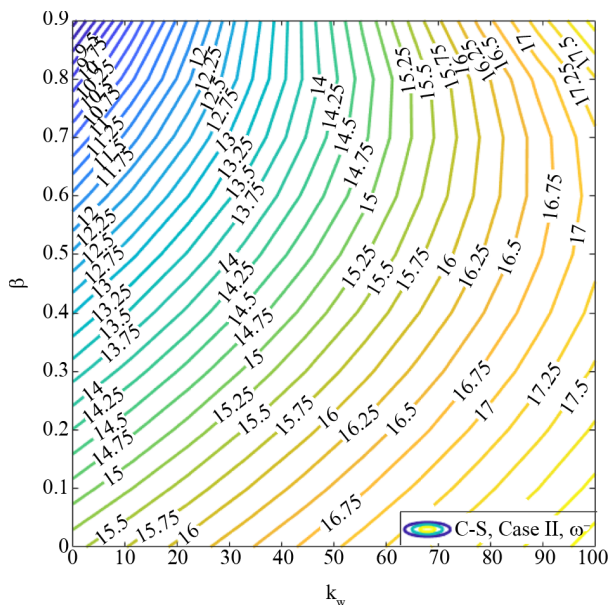
شکل (۱۹): تغییرات طول مؤثر تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد برای شرایط مرزی دوسر مفصلی.



شکل (۲۳): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی مماس اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد برای شرایط مرزی گیردار- مفصلی.



شکل (۲۲): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه‌ی چهارم مماس اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد برای شرایط مرزی دوسرگیردار.



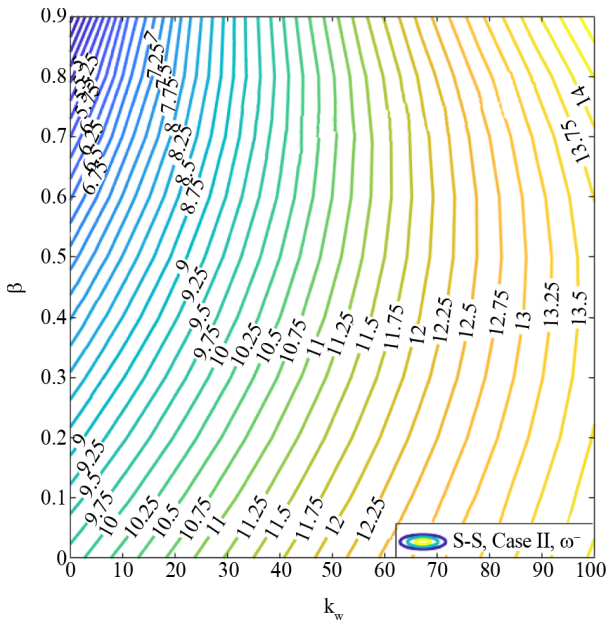
شکل (۲۴): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی مماس اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد برای شرایط مرزی گیردار- مفصلی.

شکل‌های (۲۶) تا (۲۸) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب ضریب شیب و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد تیر دو مفصلی را نشان می‌دهند. مشخص است که افزایش شیب مقطع سبب کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد و افزایش ثابت فنری وینکلر

مشخص است که افزایش شیب مقطع سبب کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد و افزایش ثابت فنری وینکلر بی‌بعد منجر به افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌گردد. در واقع، افزایش ثابت فنری وینکلر منجر به افزایش ماتریس سختی سازه می‌شود. از طرفی بین سختی و فرکانس طبیعی رابطه‌ی مستقیم وجود دارد. در نتیجه افزایش ثابت فنری منجر به افزایش سختی و فرکانس طبیعی سازه می‌شود. همچنین تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب ثابت فنری وینکلر بی‌بعد و ضریب شیب برای تغییرات (مکعبی و مرتبه چهارم) نسبت به تغییرات خطی مماس اینرسی سریع‌تر است.

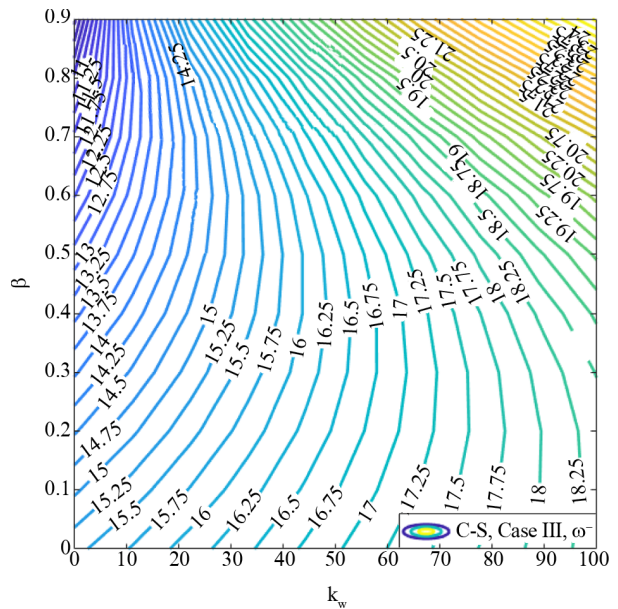
شکل‌های (۲۳) تا (۲۵) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب ضریب شیب و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد تیر گیردار- مفصلی را نشان می‌دهند. مشخص است که به‌ازای تغییرات خطی مماس اینرسی، افزایش هم‌زمان شیب مقطع و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد سبب افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود. درحالی‌که برای تغییرات (مکعبی و مرتبه چهارم) مماس اینرسی، افزایش ضریب شیب منجر به کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد و افزایش ثابت فنری وینکلر سبب افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌گردد.

سختی و فرکانس طبیعی سازه می‌شود. همچنین تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب ثابت فنری وینکلر بی‌بعد و ضریب شیب برای تغییرات (مکعبی و مرتبه چهارم) نسبت به تغییرات خطی ممان اینرسی سریع‌تر است.

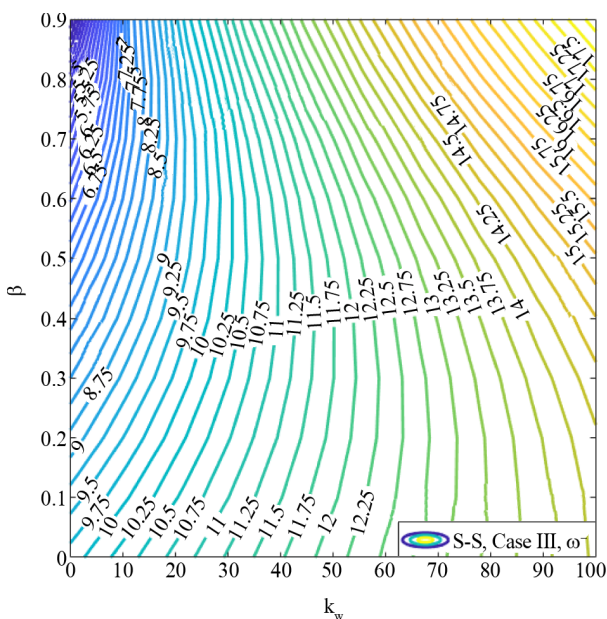


شکل (۲۷): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد برای شرایط مرزی دو سر مفصلی.

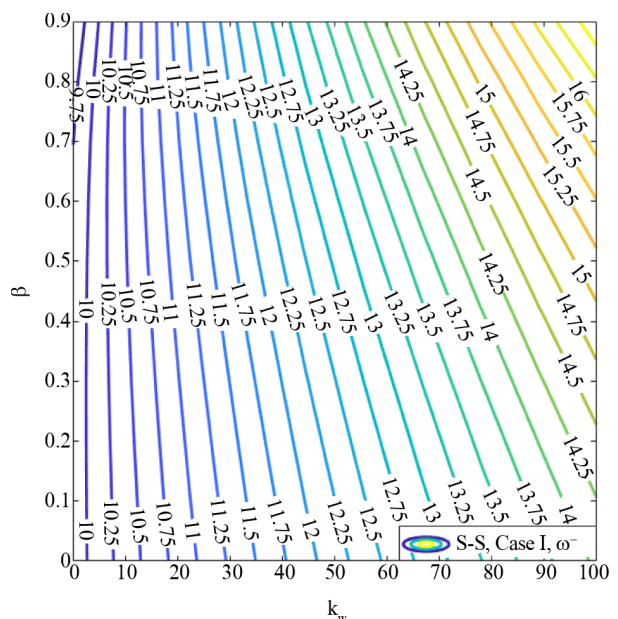
بی‌بعد منجر به افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌گردد. در واقع، افزایش ضریب شیب منجر به کاهش ماتریس سختی سازه می‌شود. از طرفی بین سختی و فرکانس طبیعی رابطه‌ی مستقیم وجود دارد. در نتیجه افزایش ثابت ضریب شیب منجر به کاهش



شکل (۲۸): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد برای شرایط مرزی گیردار- مفصلی.

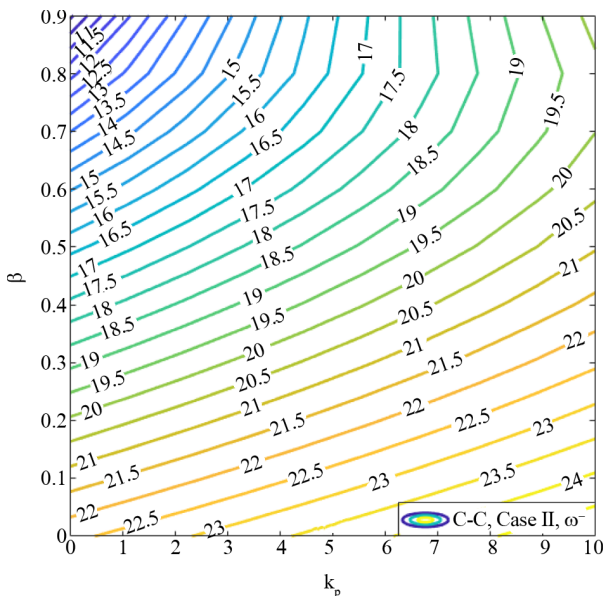


شکل (۲۹): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد برای شرایط مرزی دو سر مفصلی.

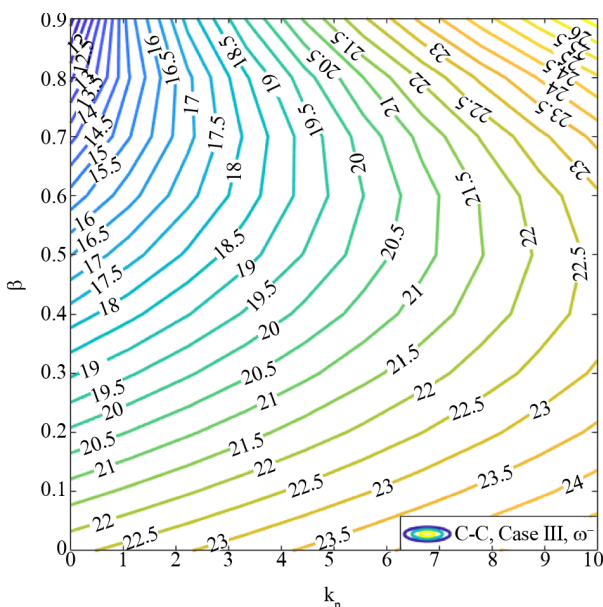


شکل (۳۰): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد برای شرایط مرزی دو سر مفصلی.

برشی پاسترناک باعث افزایش سختی و فرکانس طبیعی سازه می‌شود. به‌طور مشابه، افزایش ضریب شیب نیز منجر به کاهش ماتریس سختی سازه و کاهش فرکانس طبیعی می‌شود. هم‌چنین، مشخص است که تأثیر ثابت برشی پاسترناک بر تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد نسبت ثابت فنری وینکلر بیشتر است.



شکل (۳۰): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد برای شرایط مرزی دوسرگیردار.

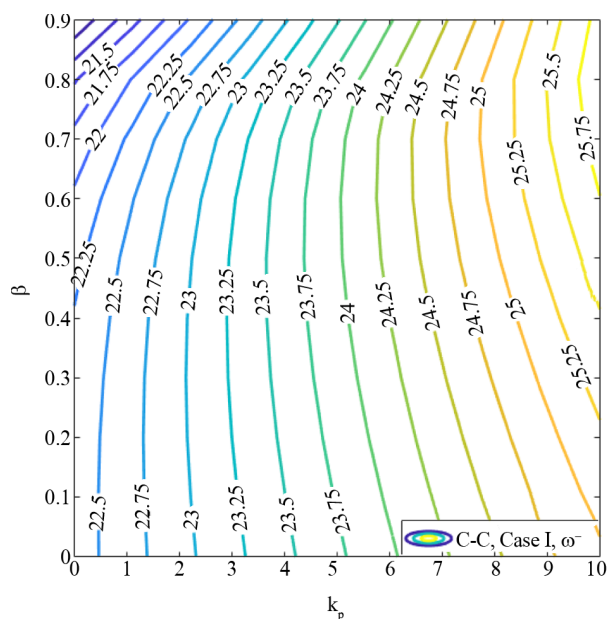


شکل (۳۱): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد برای شرایط مرزی دوسرگیردار.

۳-۵- تأثیر هم‌زمان ضریب شیب مقطع و ثابت برشی پاسترناک بر فرکانس طبیعی بی‌بعد

در این بخش به بررسی اثر هم‌زمان ضریب شیب مقطع غیرمنشوری و ثابت برشی پاسترناک بر فرکانس طبیعی بی‌بعد پرداخته می‌شود. بدین منظور، فرکانس طبیعی بی‌بعد غیرمنشوری به‌ازای مقادیری از ضریب شیب مقطع $0 < \beta < 0.9$ ، و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد $0 < \bar{k}_p < 10$ ، در شرایط مرزی مختلف محاسبه می‌شود. تمامی پارامترهای معادله از جمله ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد \bar{k}_p و ضریب شیب مقطع β و فرکانس طبیعی بی‌بعد $\bar{\omega}$ پارامترهای بی‌بعد هستند.

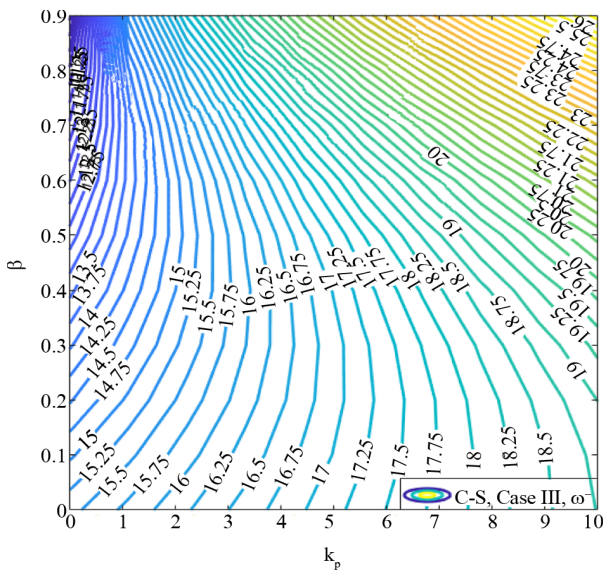
در شکل‌های (۲۹) تا (۳۱) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب ضریب شیب و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد تیر دوسرگیردار نمایش داده می‌شود. مشخص است که افزایش شیب مقطع سبب کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد و افزایش ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد منجر به افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌گردد. در واقع، افزایش ثابت برشی پاسترناک منجر به افزایش ماتریس سختی سازه می‌شود. از طرفی بین سختی و فرکانس طبیعی رابطه‌ی مستقیم وجود دارد. در نتیجه افزایش ثابت



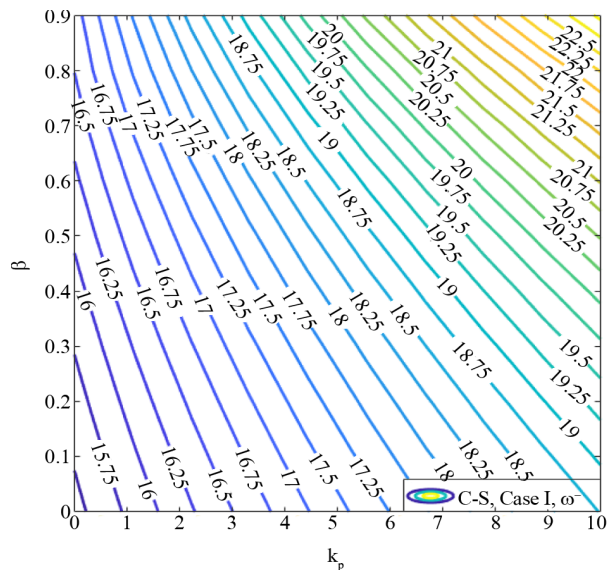
شکل (۲۹): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد برای شرایط مرزی دوسرگیردار.

و افزایش ثابت فنری وینکلر به ترتیب منجر کاهش و افزایش فرکانس طبیعی بی بعد می گردد. تغییرات فرکانس طبیعی بعد برای تغییرات (خطی و مکعبی) ممان اینرسی خطی است، درحالی که برای تغییرات مرتبه چهارم غیرخطی و با شیب شدیدتری است. در شکل های (۳۵) تا (۳۷) تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد برحسب ضریب شیب و ثابت برشی پاسترناک بی بعد تیر دو مفصلی

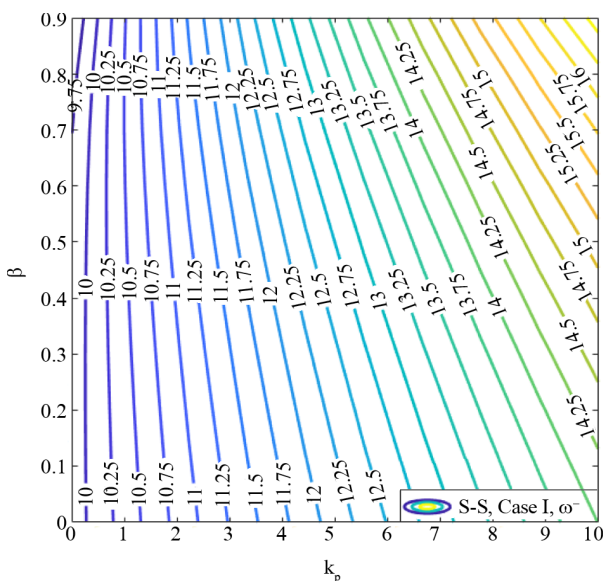
در شکل های (۳۲) تا (۳۴) تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد برحسب ضریب شیب و ثابت برشی پاسترناک بی بعد تیر گیردار- مفصلی نمایش داده می شود. مشخص است که به ازای تغییرات خطی ممان اینرسی، افزایش شیب مقطع و ثابت فنری وینکلر بی بعد سبب افزایش فرکانس طبیعی بی بعد می شود. درحالی که برای تغییرات (مکعبی و مرتبه چهارم) ممان اینرسی افزایش ضریب شیب



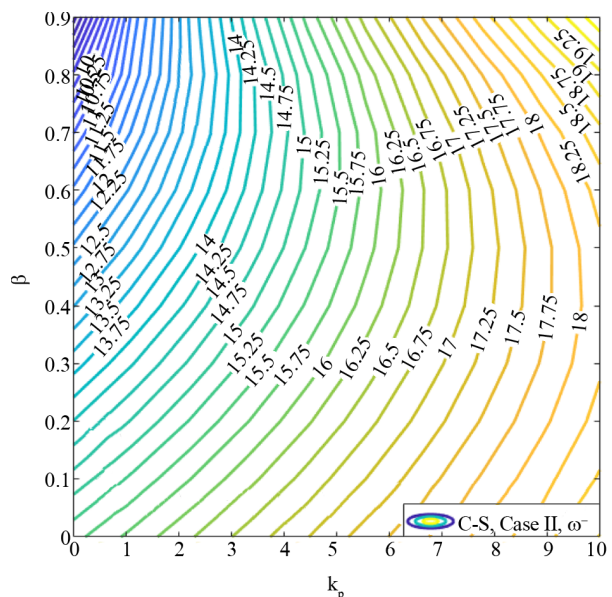
شکل (۳۴): تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی بعد برای شرایط مرزی گیردار- مفصلی.



شکل (۳۲): تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی بعد برای شرایط مرزی گیردار- مفصلی.



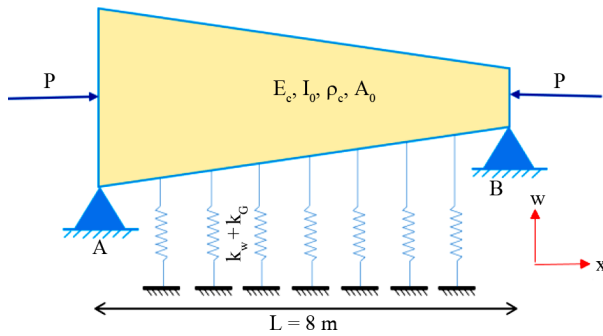
شکل (۳۵): تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات خطی ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی بعد برای شرایط مرزی دو سر مفصلی.



شکل (۳۳): تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی بعد برای شرایط مرزی گیردار- مفصلی.

۳-۵-۱- مثال ۳-۵

مطابق شکل (۳۸) یک تیر دو سر مفصلی با مقطع مستطیلی که تحت تحلیل ارتعاشی و پایداری قرار دارد در نظر گرفته است. فرض می‌شود تیر با مشخصات فیزیکی جدول (۵) بر روی بستر وینکلر - پاسترناک قرار گرفته است.



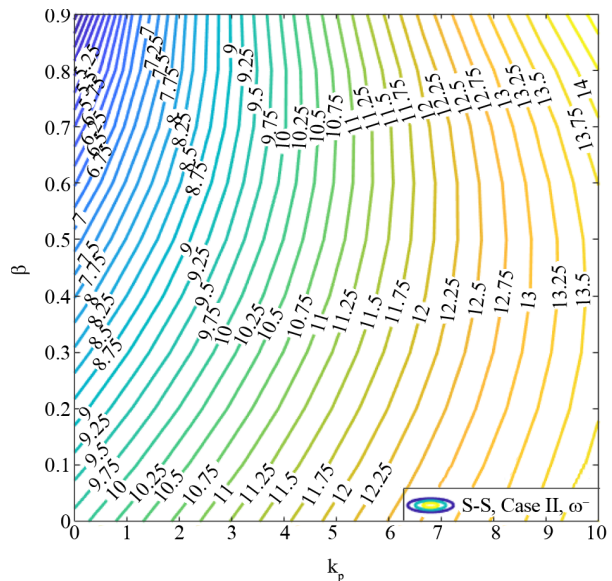
شکل (۳۸): تیر با مقطع متغیر بر بستر وینکلر - پاسترناک.

جدول (۵): مشخصات تیر.

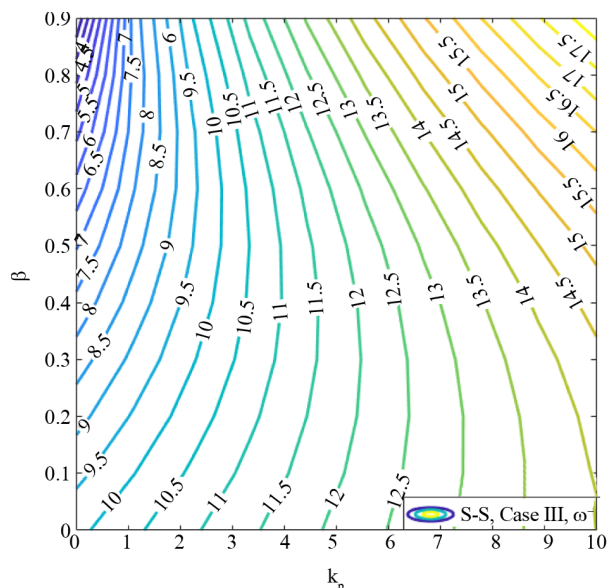
طول تیر	$L = 8$ متر
ضریب بازشوندگی	$\beta = 0.5$
عرض مقطع	$b = 0.35$ متر
ارتفاع مقطع	$h = 0.4$ متر
سطح مقطع بزرگ‌تر در ابتدای عضو	$A_0 = 0.14$ مترمربع
ممان اینرسی بزرگ‌تر در ابتدای عضو	$I_0 = 0.0187$ مجذورمترمربع
مقاومت فشاری بتن	$f_c = 25$ مگاپاسکال
مدول الاستیسیته بتن	$E_c = 23500$ مگاپاسکال
جرم مخصوص بتن	$\rho_c = 2300$ کیلوگرم بر مترمکعب
ثابت فنری وینکلر	$k_w = 160/65$ کیلونیوتن بر مترمربع
ثابت برشی پاسترناک	$k_p = 1370/83$ کیلونیوتن

مقطع عرضی تیری در سه حالت تغییرات خطی، مکعبی و مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی مطابق شکل (۳۹) نشان داده می‌شود. در حالت تغییرات خطی (Case I) عرض و ارتفاع تیر در مقطع ابتدایی (section A) به ترتیب برابر ۳۵۰ و ۴۰۰ میلی‌متر است. در این حالت، عرض مقطع با ضریب شیب ۰/۵ تغییر می‌کند. عرض و ارتفاع تیر در مقطعی انتهایی (section B) به ترتیب برابر ۱۷۵ و ۴۰۰ میلی‌متر است. در حالت تغییرات مکعبی (Case II) عرض و ارتفاع تیر در مقطع ابتدایی (section A) به ترتیب برابر ۳۵۰

نشان داده می‌شود. مشخص است که افزایش شیب مقطع سبب کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد و افزایش ثابت فنری وینکلر بی‌بعد منجر به افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌گردد. تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای تغییرات (مکعبی) ممان اینرسی خطی است. در حالی که برای تغییرات (خطی و مرتبه چهارم) دارای توزیعی غیرخطی است.



شکل (۳۶): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مکعبی ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد برای شرایط مرزی دو سر مفصلی.



شکل (۳۷): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد تیری الاستیک غیرمنشوری با تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد برای شرایط مرزی دو سر مفصلی.

تغییرات خطی ممان اینرسی (Case I)

$$K = 1.061, \quad \bar{\omega} = 10.800 \quad (38)$$

تغییرات مکعبی ممان اینرسی (Case II)

$$K = 1.395, \quad \bar{\omega} = 8.435 \quad (39)$$

تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی (Case II)

$$K = 1.601, \quad \bar{\omega} = 8.725 \quad (40)$$

با استفاده از پارامترهای ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد، مقادیر ظرفیت بار بحرانی و فرکانس طبیعی تیر محاسبه می‌شود.

تغییرات خطی ممان اینرسی (Case I)

$$\omega = \bar{\omega} \sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0 L^4}}$$

$$\omega = 10.800 \sqrt{\frac{23500 \times 10^6 \times 0.00187}{2300 \times 0.14 \times 8^4}} = 62.29 \text{ Hz} \quad (41)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 \times 23500 \times 10^6 \times 0.00187}{1.061^2 \times 8^2} =$$

$$6009.26 \text{ KN}$$

تغییرات مکعبی ممان اینرسی (Case II)

$$\omega = \bar{\omega} \sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0 L^4}}$$

$$\omega = 8.435 \sqrt{\frac{23500 \times 10^6 \times 0.00187}{2300 \times 0.14 \times 8^4}} = 48.65 \text{ Hz} \quad (42)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 \times 23500 \times 10^6 \times 0.00187}{1.395^2 \times 8^2} =$$

$$3475.49 \text{ KN}$$

تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی (Case III)

$$\omega = \bar{\omega} \sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0 L^4}}$$

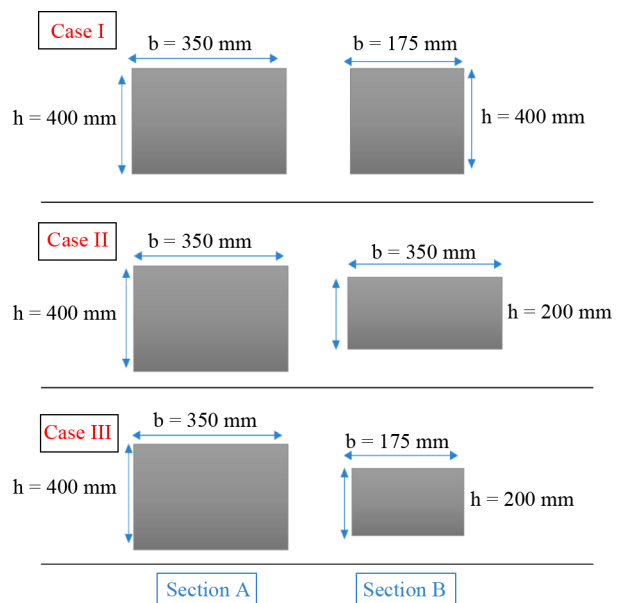
$$\omega = 8.725 \sqrt{\frac{23500 \times 10^6 \times 0.00187}{2300 \times 0.14 \times 8^4}} = 50.32 \text{ Hz} \quad (43)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 \times 23500 \times 10^6 \times 0.00187}{1.601^2 \times 8^2} =$$

$$2637.55 \text{ KN}$$

مقدار ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی برای تیر غیرمنشوری بر بستر پاسترناک بدین صورت محاسبه می‌شود.

و ۴۰۰ میلی‌متر است. در این حالت، ارتفاع مقطع با ضریب شیب ۰/۵ تغییر می‌کند. عرض و ارتفاع مقطع در مقطع انتهایی (section B) به ترتیب برابر ۳۵۰ و ۲۰۰ میلی‌متر است. در حالت تغییرات مرتبه‌ی چهارم (Case III) عرض و ارتفاع تیر در مقطع ابتدایی (section A) به ترتیب برابر ۳۵۰ و ۴۰۰ میلی‌متر است. در این حالت، عرض و ارتفاع مقطع (به‌طور هم‌زمان) با ضریب شیب ۰/۵ تغییر می‌کند. عرض و ارتفاع مقطع در مقطع انتهایی (section B) به ترتیب برابر ۱۷۵ و ۲۰۰ میلی‌متر است.



شکل (۳۹): مقطع عرضی تیر غیرمنشوری دو سر مفصلی در نقاط ابتدایی و انتهایی.

مقدار ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی برای تیر غیرمنشوری بر بستر وینکلر بدین صورت محاسبه می‌شود:

با استفاده از اطلاعات جدول (۵) مقدار پارامتر ثابت فنری وینکلر بی‌بعد به این صورت محاسبه می‌شود.

$$\bar{k}_w = \frac{k_w L^4}{EI_0} = \frac{160.65 \times 10^3 \times 8^4}{23500 \times 10^6 \times 0.00187} = 15 \quad (37)$$

در گام بعدی، با استفاده از پارامترهای شیب مقطع ۰/۵ و ثابت فنری وینکلر بی‌بعد $\bar{k}_w = 15$ و نتایج شکل‌های (۸) تا (۱۰) و (۲۶) تا (۲۸) برای تیر دو سر مفصلی با تغییرات خطی، مکعبی و مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی، مقدار ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد تعیین می‌شود.

تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی (Case III)

$$\omega = \bar{\omega} \sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0 L^4}}$$

$$\omega = 9.270 \sqrt{\frac{23500 \times 10^6 \times 0.00187}{2300 \times 0.14 \times 8^4}} = 53.46 \text{ Hz} \quad (45)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 \times 23500 \times 10^6 \times 0.00187}{1.486^2 \times 8^2} = 3062.03 \text{ KN}$$

در این بخش مقادیر پارامترهای ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد، ظرفیت بار بحرانی و فرکانس طبیعی متناظر با آن تیر غیرمنشوری بر بستر وینکلر-پاسترناک محاسبه گردید و کاربرد منحنی‌های هم‌تراز ارائه شده بررسی شد. در ادامه، تأثیر بستر وینکلر-پاسترناک مطابق مثال ۶-۳ بر ظرفیت بار بحرانی و فرکانس طبیعی تیر غیرمنشوری با تغییرات خطی، مکعبی و مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی بررسی می‌شود.

در جداول (۶) تا (۸)، Δ_1 معرف اثر بستر وینکلر-پاسترناک بر تغییرات ظرفیت بار بحرانی تیر و Δ_2 معرف اثر بستر وینکلر-پاسترناک بر تغییرات فرکانس طبیعی تیر است و به صورت رابطه زیر محاسبه می‌شود.

جدول (۶): تأثیر بستر وینکلر-پاسترناک بر ظرفیت بار بحرانی و فرکانس طبیعی تیر غیرمنشوری با تغییرات خطی.

تغییرات خطی	$\bar{k}_p = 0$	$\bar{k}_p = 2$	$\bar{k}_p = 0$
P_{cr} (کیلو نیوتن)	۶۰۹/۲۶	۶۳۴۳/۹۶	۴۹۷۳/۱۲
ω (هرتز)	۶۲/۲۹	۶۳/۹۷	۵۶/۶۶
Δ_1 (درصد)	۲۰/۸۳	۲۷/۵۶	-
Δ_2 (درصد)	۹/۹۴	۱۲/۹۰	-

جدول (۷): تأثیر بستر وینکلر-پاسترناک بر ظرفیت بار بحرانی و فرکانس طبیعی تیر غیرمنشوری با تغییرات مکعبی.

تغییرات مکعبی	$\bar{k}_p = 0$	$\bar{k}_p = 2$	$\bar{k}_p = 0$
P_{cr} (کیلو نیوتن)	۳۴۷۵/۴۹	۳۸۵۷/۳۹	۲۴۶۸/۵۶
ω (هرتز)	۴۸/۶۵	۵۰/۹۹	۴۱/۰۷
Δ_1 (درصد)	۳۹/۷۷	۵۵/۱۳	-
Δ_2 (درصد)	۱۸/۴۶	۲۴/۱۵	-

با استفاده از اطلاعات جدول (۹) مقدار پارامتر ثابت برشی پاسترناک به این صورت محاسبه می‌شود.

$$\bar{k}_p = \frac{k_p L^2}{EI_0} = \frac{1370.83 \times 10^3 \times 8^2}{23500 \times 10^6 \times 0.00187} = 2 \quad (43)$$

در گام بعدی، با استفاده از پارامترهای شیب مقطع $\beta = 0.5$ و ثابت برشی پاسترناک بی‌بعد $\bar{k}_p = 2$ و نتایج شکل‌های (۱۷) تا (۱۹) و (۳۵) تا (۳۷) برای تیر دو سر مفصلی با تغییرات خطی، مکعبی و مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی، مقدار ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد تعیین می‌شود.

تغییرات خطی ممان اینرسی (Case I)

$$K = 1.033, \quad \bar{\omega} = 11.092 \quad (44)$$

تغییرات مکعبی ممان اینرسی (Case II)

$$K = 1.324, \quad \bar{\omega} = 8.841 \quad (45)$$

تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی (Case II)

$$K = 1.486, \quad \bar{\omega} = 9.270 \quad (46)$$

با استفاده از پارامترهای ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد، مقادیر ظرفیت بار بحرانی و فرکانس طبیعی تیر محاسبه می‌شود.

تغییرات خطی ممان اینرسی (Case I)

$$\omega = \bar{\omega} \sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0 L^4}}$$

$$\omega = 11.092 \sqrt{\frac{23500 \times 10^6 \times 0.00187}{2300 \times 0.14 \times 8^4}} = 63.97 \text{ Hz} \quad (43)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 \times 23500 \times 10^6 \times 0.00187}{1.033^2 \times 8^2} = 6343.96 \text{ KN}$$

تغییرات مکعبی ممان اینرسی (Case II)

$$\omega = \bar{\omega} \sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0 L^4}}$$

$$\omega = 8.841 \sqrt{\frac{23500 \times 10^6 \times 0.00187}{2300 \times 0.14 \times 8^4}} = 50.99 \text{ Hz} \quad (44)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 \times 23500 \times 10^6 \times 0.00187}{1.324^2 \times 8^2} = 3857.39 \text{ KN}$$

مختلف باعث افزایش طول مؤثر و کاهش ظرفیت بار کماتشی تیر می‌شود.

- اثر هم‌زمان ضریب شیب مقطع و ثابت فنری وینکلر و ثابت برشی پاسترناک بر فرکانس طبیعی بی‌بعد بررسی شد. افزایش پارامترهای مذکور بسته به نوع تغییرات ممان اینرسی در طول عضو سبب افزایش یا کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود. از دو روش اجزای محدود و رایلی ریتز برای حل معادله متشکله استفاده گردید. تمامی پارامترهای دخیل در مقاله حاضر از جمله (ضریب شیب مقطع β ، ثابت فنری وینکلر \bar{k}_w ، ثابت برشی پاسترناک \bar{k}_p ، ضریب طول مؤثر K و فرکانس طبیعی $\bar{\omega}$) بی‌بعدند. همچنین از منحنی‌های هم‌تراز برای نمایش نمودارها استفاده شده است. نتایج این تحقیق قابلیت تعمیم دارد و می‌تواند ملاک طراحی مهندسان قرار گیرد.

References

مراجع

- Babaei, B.F., & Behjat, B. (2017). *Analysis of Euler-Bernoulli Beam on Elastic Foundation Considering Nonlocal Effects in Nano Scale*.
- Bazant, Z.P., Cedolin, L., & Hutchinson, J.W. (1993). *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*.
- BHRC (2020). *National Building Regulations, Design and Implementation of Concrete Buildings - Chapter 9*. Ministry of Housing and Urban Development, Bureau of Compilation and Promotion of National Building Regulations (in Persian).
- BHRC (2022). *National Building Regulations, Design and Implementation of Steel Buildings - Chapter 10*. Ministry of Housing and Urban Development, Bureau of Compilation and Promotion of National Building Regulations (in Persian).
- Dinnik, A. (1932). Design of columns of varying cross-section. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 54(2), 165-171.
- Fangshe, H.E., Xiao-mei, L.I.U., & Jiang, X. (2009). Galerkin method used to solve the bending problem of beams on tensionless winkler foundations. *Journal of Xi'an University of Architecture and Technology*, 41(3), 324-327.

جدول (۸): تأثیر بستر وینکلر- پاسترناک بر ظرفیت بار بحرانی و فرکانس طبیعی تیر غیرمنشوری با تغییرات مرتبه‌ی چهارم.

تغییرات مرتبه چهارم	$\bar{k}_p = 0$	$\bar{k}_p = 2$	$\bar{k}_p = 0$
P_{cr} (کیلو نیوتن)	۲۶۳۷/۵۵	۳۰۶۲/۰۳	۱۶۹۱/۱۹
ω (هرتز)	۵۰/۳۲	۵۳/۴۶	۴۰/۱۲
Δ_1 (درصد)	۵۵/۹۶	۸۱/۰۶	-
Δ_2 (درصد)	۲۵/۴۲	۳۳/۲۵	-

$$\Delta_1 = \frac{P_{cr(w \text{ or } P)} - P_{cr}}{P_{cr}} \times 100 \quad (۴۶)$$

$$\Delta_2 = \frac{\omega_{cr(w \text{ or } P)} - \omega_{cr}}{\omega_{cr}} \times 100$$

مشخص است که بستر وینکلر- پاسترناک در تیر غیرمنشوری تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر افزایش ظرفیت بار بحرانی و افزایش فرکانس طبیعی تیر دارد. مبین است که برای تیر غیرمنشوری با تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی تأثیر بستر وینکلر- پاسترناک بر افزایش فرکانس طبیعی و ظرفیت بار بحرانی در مقایسه با حالت‌های دیگر چشم‌گیرتر است.

۴- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، بر مبنای روش عددی اجزای محدود پایداری و ارتعاشات تیر غیرمنشوری بر بستر وینکلر- پاسترناک بررسی شد. در گام اول، معادله دیفرانسیل با استفاده از روش همیلتون استخراج گردید. در گام بعدی، شکل ضعیف معادله دیفرانسیل حاکم نوشته شد. از توابع میان‌یابی هرمیتی به‌عنوان تابع تغییر مکان عرضی و تابع وزن استفاده شده و ماتریس‌های سختی مصالح، سختی هندسی و ماتریس جرم استخراج گردید. پس از استخراج ماتریس‌های سختی مقادیر ویژه (ضریب طول مؤثر و فرکانس طبیعی بی‌بعد) بررسی شد. از تکنیک ریشه‌یابی به‌وسیله کدنویسی در نرم‌افزار متلب برای محاسبه مقادیر ویژه استفاده شد. خلاصه نتایج پژوهش به شرح زیر است:

- اثر هم‌زمان ضریب شیب مقطع و ثابت فنری وینکلر و ثابت برشی پاسترناک بر طول مؤثر تیری الاستیک بررسی شد. افزایش پارامترهای مذکور در تمامی شرایط تکیه‌گاهی

- vibration of nonlocal Euler-Bernoulli beam on Pasternak foundation using Ritz method. *Modares Mechanical Engineering*, 13(11), 64-76.
- Shi-rong, L., Chang-jun, C., & You-he, Z. (2003). Thermal post-buckling of an elastic beams subjected to a transversely non-uniform temperature rising. *Applied Mathematics and Mechanics*, 24, 514-520.
- Soltani, M. (2020). Finite element modeling for buckling analysis of tapered axially functionally graded Timoshenko beam on elastic foundation. *Mechanics of Advanced Composite Structures*, 7(2), 203-218.
- Soltani, M., & Ahanian, A. (2021). Free vibration and flexural-torsional stability analyses of axially functionally graded tapered thin-walled beam resting on elastic foundation. *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53(6), 3587-3614.
- Soltani, M., & Asgarian, B. (2019). Stability and free vibration analyses of non-prismatic columns using the combination of power series expansions and galerkin's method. *Amirkabir Journal of Civil Engineering*, 50(6), 1017-1032.
- Timoshenko, S.P., & Gere, J.M. (2009). *Theory of Elastic Stability*. Courier Corporation.
- Trinh, L.C., Vo, T.P., Thai, H.T., & Nguyen, T.K. (2016). An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads. *Composites Part B: Engineering*, 100, 152-163.
- Wang, C.M., & Wang, C.Y. (2004). *Exact Solutions for Buckling of Structural Members* (Vol. 6). CRC Press.
- Zakeri, M., Rahmani, A., Attarnejad, R. (2014). Free vibration analysis Timoshenko beam on elastic foundation two parameters with variable materials during the beam. *The 5th National Conference on Earthquakes and Structures*, Kerman.
- Zhang, Y. (2008). Tensionless contact of a finite beam resting on Reissner foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50(6), 1035-1041.
- Hadidi, A., Azar, B.F., & Marand, H.Z. (2014). Second-order nonlinear analysis of steel tapered beams subjected to span loading. *Advances in Mechanical Engineering*, 6, 237983.
- Khaniki, H.B., Hosseini-Hashemi, S., & Nezamabadi, A. (2018). Buckling analysis of nonuniform nonlocal strain gradient beams using generalized differential quadrature method. *Alexandria Engineering Journal*, 57(3), 1361-1368.
- Khorshidi, K., Bakhsheshy, A., & Ghadirian, H. (2016). The study of the effects of thermal environment on free vibration analysis of two-dimensional functionally graded rectangular plates on Pasternak elastic foundation. *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, 6(3), 137-147.
- Ma, X., Butterworth, J.W., & Clifton, G.C. (2009). Static analysis of an infinite beam resting on a tensionless Pasternak foundation. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 28(4), 697-703.
- Morley, A. (1917). Critical loads for long tapering struts. *Engineering*, 104, 295.
- Özmutlu, A. (2008). Response of a finite beam on a tensionless Pasternak foundation under symmetric and asymmetric loading. *Struct. Eng. Mech*, 30, 21-36.
- Pinarbasi, S. (2012). Buckling analysis of nonuniform columns with elastic end restraints. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 7(5), 485-507.
- Rahai, A.R., & Kazemi, S. (2008). Buckling analysis of non-prismatic columns based on modified vibration modes. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(8), 1721-1735.
- Rajasekaran, S., & Bakhshi Khaniki, H. (2019). Finite element static and dynamic analysis of axially functionally graded nonuniform small-scale beams based on nonlocal strain gradient theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(14), 1245-1259.
- Riahi, H.T., Barjoui, A.S., Bazazzadeh, S., & Etezady, S.M.A. (2012, September). Buckling analysis of non-prismatic columns using slope-deflection method. In *15th World Conference on Earthquake Engineering*, Lisbon, Portugal.
- Salemi, M., Nasiri, H., & Afshari, H. (2014). Thermal effect on the deflection, critical buckling load and

Analysis of Buckling and Vibrations of Non-Prismatic Beam on Winkler-Pasternak Foundation with Finite Element and Riley-Ritz Methods

Amir Hossein Taherkhani¹ and Majid Amin Afshar^{2*}

1. M.Sc. Graduate, Structural Engineering, Department of Civil Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran
2. Assistant Professor, Faculty of Engineering and Technology, Department of Civil Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran, *Corresponding Author, email: mj.afshar@eng.ikiu.ac.ir

In the analysis of structures such as building foundations, railway rails, reservoirs, airport runways and docks, it is necessary to consider the effect of the elastic foundation in modeling. For this reason, different theories such as Winkler, Pasternak, and Reisner have been introduced. On the other hand, a member with a variable cross-section has a higher load-bearing capacity than a prismatic member with a larger cross-section. Nowadays, engineers use members with variable cross-sections in the design of structural members to minimize the consumption of materials, to reduce the weight of the structure, and to increase the critical buckling load capacity. Numerous studies have been conducted to investigate the critical load capacity of compressive members, particularly focusing on the stability of non-prismatic columns on elastic foundations. For the first time, Timoshenko, Wang, Bazzant, Morley, and Dinnik studied the critical buckling load of elastic columns based on closed-form solutions or numerical approximations of the governing differential equation. In these studies, researchers aimed to provide simplified relations for practical use by designers. In the present paper, the vibrations and stability of a non-prismatic beam on a Winkler-Pasternak foundation are examined. The variations in the moment of inertia and cross-sectional area of the beam are incorporated into the equation in three cases, as functions of the initial moment of inertia and initial cross-sectional area. The effects of displacement and vertical pressure of the soil are modeled through elastic springs based on the Winkler model, and shear deformations are taken into account according to the Pasternak model. To solve the governing differential equation, both the finite element method and the Rayleigh-Ritz method are employed. In the finite element method, third-order Hermite interpolation functions are used, while in the Rayleigh-Ritz method, a power series expansion is employed as the shape function. Finally, eigenvalue-solving techniques are applied to determine the response parameters, including dimensionless natural frequency and effective length factor. All calculations, including the computation of material stiffness matrices, geometric stiffness, mass, and Winkler-Pasternak foundation stiffness, were carried out using MATLAB coding. The results indicate that the simultaneous increase in the section slope coefficient, Winkler spring constant, and Pasternak shear constant under various support conditions leads to an increase in the effective length and a decrease in the beam's buckling load capacity. Additionally, the simultaneous increase in the section slope coefficient, Winkler spring constant, and Pasternak shear constant, depending on the type of variations in the moment of inertia along the member, results in either an increase or decrease in the dimensionless natural frequency. Both the finite element method and Rayleigh-Ritz method were used to solve the governing equation. The Rayleigh-Ritz method, compared to the finite element method, is more efficient. With fewer terms, the Rayleigh-Ritz method provides a more accurate calculation of the target parameters in comparison to the finite element method. All parameters involved in this study, including the section slope coefficient (β), Winkler spring constant (k_w), Pasternak shear constant (k_p), effective length factor (K), and natural frequency (ω), are dimensionless. The ninth topic (year 2020) and the tenth topic (year 2022) of Iran's national building regulations do not provide relations for analyzing the stability and vibrations of non-prismatic beams on the Winkler-Pasternak foundation. In this paper, aligned curves are used to present the results. The findings of this study serve as practical research that can be used by engineers and designers for the design of non-prismatic beams on Winkler-Pasternak foundations.



Extended Abstracts

Furthermore, a practical example demonstrating aligned curves to calculate the critical buckling load capacity and natural frequency of the system is provided. The results of previous research are used for verification. There is an acceptable agreement between the present results and previous research.

Keywords: Stability, Natural Frequency, Hamilton's Principle, Finite Elements, Eigenvalue Analysis